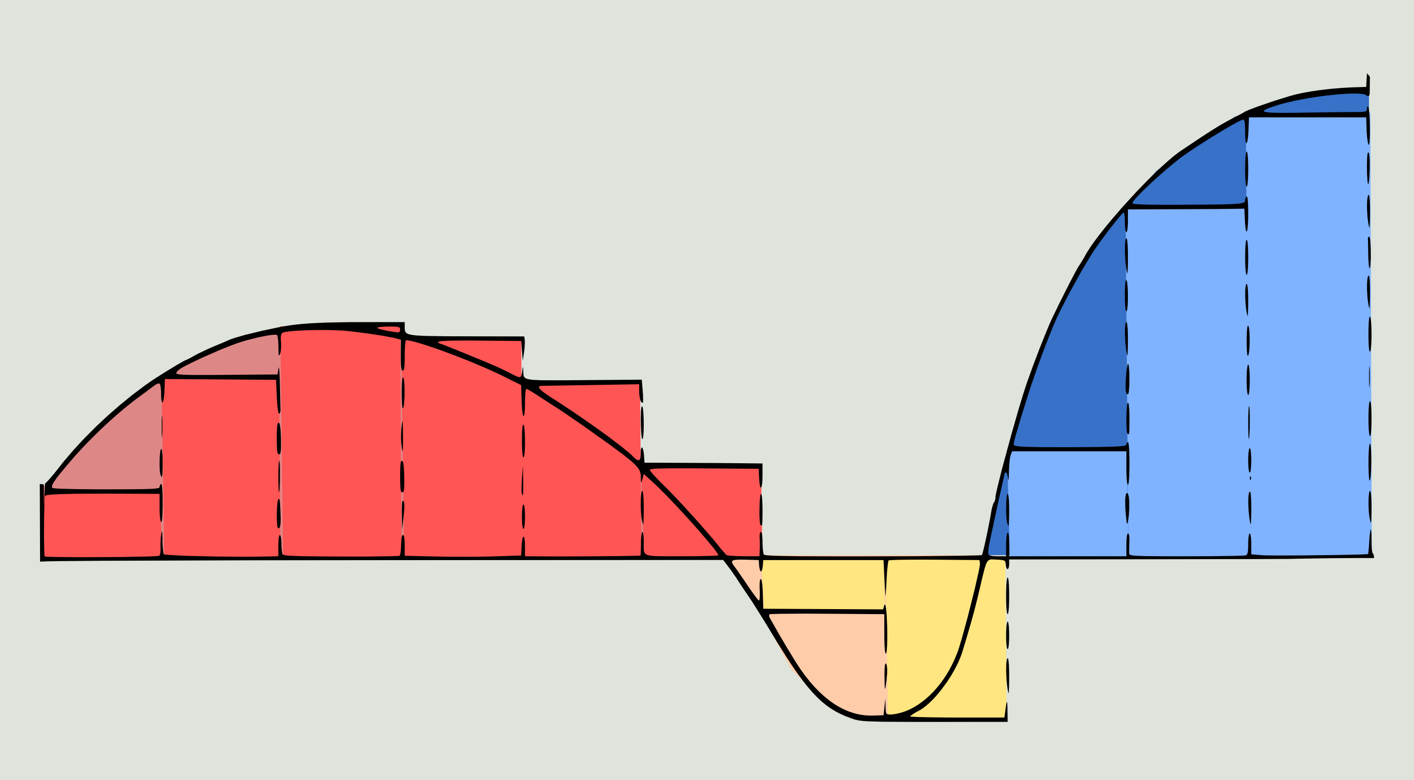
V. Ditkine, A. Proudnikov

CALCUL OPÉRATIONNEL



Éditions Mir Moscou

В. А. ДИТКИН
А. П. ПРУДНИКОВ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

V. DITKINE et A. PROUDNIKOV

CALCUL OPÉRATIONNEL

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par DJILALI EMBAREK

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos

Le calcul opérationnel s'est constitué en discipline analytique à la fin du XIX siècle. Toutefois on le retrouve déjà dans les travaux classiques de Leibniz, Bernoulli, Lagrange, Laplace, Euler, Fourier, Poisson, Cauchy. Le calcul opérationnel a réalisé d'importants progrès au cours des dernières décennies grâce essentiellement aux travaux des mathématiciens soviétiques et polonais.

Les méthodes du calcul opérationnel se prêtent bien à la résolution de nombreux problèmes complexes dans des disciplines aussi variées que la physique mathématique, la théorie des fonctions spéciales, le calcul d'intégrales, la sommation de séries de fonctions, la théorie des nombres, l'automatique et la télémécanique, la théorie de l'asservissement et de la commande, la mécanique, l'électrotechnique, la radiotechnique, la transmission de la chaleur, etc.

En quoi consiste le calcul opérationnel ? Un opérateur de dérivation, $\frac{d}{dt}$, est considéré comme une quantité algébrique sur laquelle on effectue les mêmes opérations que sur des nombres ordinaires. L'introduction de fonctions de l'opérateur de dérivation conduit à de nouveaux opérateurs. L'utilisation des fonctions de l'opérateur de dérivation en analyse mathématique a donné naissance à un « calcul symbolique » qui a établi les règles formelles d'application de ces opérateurs à des fonctions définies sur la droite numérique tout entière. Dans le but de résoudre des équations différentielles avec des conditions initiales données, le physicien Heaviside (1850-1925) [16, 17] a envisagé le calcul opérationnel pour des fonctions définies sur l'axe numérique et a réussi à résoudre de nombreux problèmes appliqués. Il a proposé des règles formelles de manipulation de l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ et de certaines fonctions de cet opérateur. A noter que les opérations formelles ont été utilisées dans d'autres disciplines. Nous avons en vue les opérations sur les nombres irrationnels et les nombres complexes dont l'usage est bien antérieur à l'élaboration de théories rigoureuses de ces nombres. Mais Heaviside a fait peu cas de la justification de ces méthodes. D'innombrables

travaux ont été entrepris pour asseoir le calcul opérationnel qui commençait à rayonner.

Le premier du genre fait intervenir la transformation de Laplace. Cette approche ne fait plus appel à l'opérateur de dérivation et aux fonctions de ce dernier, elle se base essentiellement sur la méthode des intégrales de contour et la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Dans les travaux [6] et [25] le calcul opérationnel repose sur la théorie générale des opérateurs linéaires. On sait que cette théorie étudie des « fonctions d'opérateurs » au sens général. Elle établit en effet une correspondance entre un ensemble de fonctions et une classe d'opérateurs, qui à toute fonction $F(\lambda)$ associe un opérateur $F(A)$ bien défini et telle qu'à la fonction unité $F(\lambda) = 1$ est associé l'opérateur unité E, et à la fonction $F(\lambda) = \lambda$, l'opérateur A. En toute rigueur, il est question ici d'un isomorphisme entre une classe d'opérateurs et une classe de fonctions qui fait correspondre à la fonction unité l'opérateur unité, à la fonction $F(\lambda) = \lambda$ l'opérateur A, à la somme $F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ et au produit $F_1(\lambda) F_2(\lambda)$ de fonctions la somme et le produit des opérateurs respectifs. La transformation de Laplace réalise cette correspondance entre un ensemble de fonctions d'une variable complexe et un ensemble d'opérateurs.

La justification du calcul opérationnel qui s'appuie sur la transformation de Laplace a grandement restreint le champ d'applications du calcul opérationnel basé sur les fonctions transformables-Laplace. On peut néanmoins remédier à cela en revenant à l'interprétation des symboles de Heaviside moyennant une généralisation adéquate de la notion de fonctions. Cette voie a été préconisée par Mikusinski [24] qui est revenu à la notion initiale d'opérateur et s'est passé de la transformation de Laplace.

La justification de Mikusinski part d'une algèbre sur des fonctions dans laquelle le rôle du produit est imparti au produit de convolution. Mikusinski a exclu l'intégrale de Laplace et, partant, les conditions assujettissant les fonctions étudiées à l'infini. Cependant cette approche n'est pas satisfaisante à tous les points de vue, car l'intégrale de Laplace simplifie très souvent les formules du calcul opérationnel. L'exclusion de l'intégrale de Laplace complique l'étude de la structure du corps d'opérateurs, car elle est l'unique outil naturel de représentation des opérateurs par des fonctions d'une variable complexe. Dans les travaux [9] et [10] on introduit la transformation généralisée de Laplace qui établit un isomorphisme entre le corps des opérateurs de Mikusinski et un corps dont les éléments sont des sous-ensembles de fonctions d'une variable complexe. La transformation généralisée de Laplace a été étudiée par L. Berg dans [2] où il introduit la notion de convergence asymptotique de l'intégrale de Laplace.

La solution la plus rationnelle devrait s'en tenir à la notion initiale du calcul opérationnel sans pour autant exclure l'intégrale de Laplace. Dans le calcul de Mikusinski le produit par une constante prend

une double signification: un produit ordinaire et un produit de convolution par une fonction égale à une constante. Aussi a-t-on intérêt en algèbre de Mikusinski à remplacer le produit de convolution par sa dérivée par rapport à la limite supérieure. A noter que les deux produits se confondent. Cette approche est proposée par les auteurs dans [10]. C'est la voie suivie par L. Berg dans sa monographie [1]. Le calcul opérationnel est systématiquement développé dans de nombreux travaux publiés en russe.

Le calcul opérationnel doit beaucoup à l'école polonaise dont les plus brillants représentants en l'occurrence sont Mikusinski, Ryll-Nardzewski, Slowikowski, Bittner, Sikorski, Bellert, Wlodarski. A signaler encore E. Titchmarsh qui est l'auteur du fameux théorème du produit de convolution. G. Doetsch a apporté une appréciable contribution à la théorie de la transformation de Laplace. L. Berg a consacré d'importants travaux aux nouvelles orientations du calcul opérationnel. I. Chtokalo s'est penché sur l'histoire du calcul opérationnel dans [5].

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE ET TRANSFORMATION DE LAPLACE

§ 1. Notions fondamentales d'analyse complexe

1. Nombres complexes et fonctions d'une variable complexe. Les notions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable réelle (fonction, limite, continuité, dérivée et intégrale d'une fonction, etc.) se transposent pratiquement sans changement à la théorie des fonctions d'une variable complexe, mais avec un contenu foncièrement différent. Dans le cours d'algèbre élémentaire, on étudie les nombres complexes, les opérations arithmétiques sur eux et leur représentation géométrique par des points du plan. Par analogie avec une fonction d'une variable réelle $y = f(x)$, une fonction d'une variable complexe est notée $w = f(z)$ si est donnée une loi qui à chaque point $z = x + iy$ d'un ensemble M, associe un point ou un ensemble de points $w = u + iv$. Dans le premier cas, la fonction $w = f(z)$ est *univalente*, dans le second, *multivalente*. L'ensemble M est l'*ensemble de définition de la fonction* $f(z)$, l'ensemble N de toutes les valeurs prises par $f(z)$ sur M est l'*ensemble de variation*. Si, en théorie des fonctions de variable réelle toute fonction est représentée par un graphe sur un plan, en théorie des fonctions d'une variable complexe cela est impossible, car à tout couple de nombres réels (x, y) est associé un couple de valeurs réelles (u, v) à l'aide des expressions

$$f(z) = f(x + iy) = w = u(x, y) + iv(x, y).$$

On obtient une illustration géométrique suggestive de cette relation fonctionnelle si l'on comprend la fonction $w = f(z)$ comme une application des points $z(x, y)$ du plan complexe (z) sur des points $w(u, v)$ du plan complexe (w).

L'expression

$$z = x + iy = re^{i\varphi}$$

est la *forme exponentielle du nombre complexe* z; $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ est le *module*, il est défini de façon unique; $\varphi = \operatorname{Arg} z$ est l'argument, il est connu à 2π près. En dehors du symbole $\operatorname{Arg} z$, qui désigne l'ensemble de toutes les valeurs de l'argument, on utilise souvent le symbole arg pour désigner une valeur bien définie de Arg.

Etudions l'application $w = f(z)$ sur l'exemple de la fraction rationnelle simple $w = \frac{1}{|z|}$. On a manifestement $|w| = \frac{1}{|z|}$, donc l'application $w = \frac{1}{|z|}$ fait correspondre au cercle $|z| = 1$ du plan

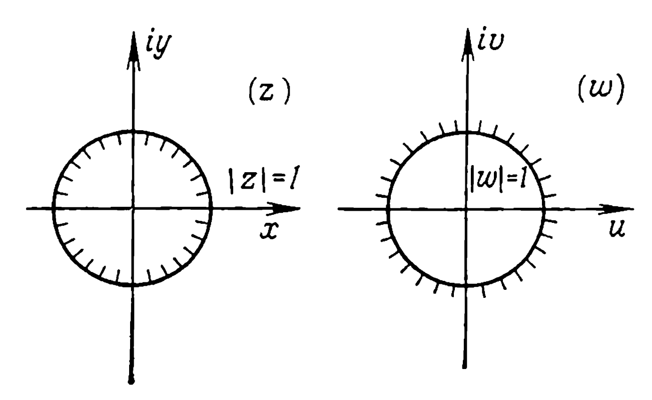


Fig. 1

(z) le cercle $|w| = 1$ du plan (w), au domaine $|z| < 1$ le domaine $|w| > 1$, et au domaine $|z| > 1$ $|w| < 1$ (fig. 1). Pour construire les points obtenus par l'application de (z) sur (w) mettons z sous la forme $z = |z| e^{i\varphi}$. Il vient $w = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$. Supposons tout d'abord que $|z| > 1$. Traçons à partir de z les tangentes au cercle unité

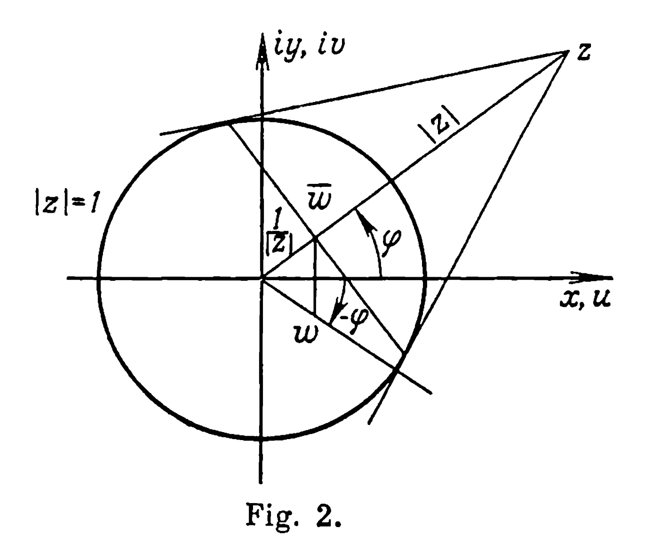


Fig. 2.

(fig. 2). La corde qui joint les points de tangence coupe Oz en un point $\bar{w}$ qui, d'après un théorème connu de géométrie, est situé à la distance $\frac{1}{|z|}$ de l'origine des coordonnées. Le point w conjugué de $\bar{w}$ est le point cherché. Si $|z| < 1$ on obtient le même résultat *mutatis mutandis* [19].

2. Limite d'une suite de nombres complexes. La limite d'une suite de nombres complexes se définit formellement comme celle d'une suite de nombres réels.

Définition 1. *Une suite de nombres complexes* $\{z_n\}$ *admet* z_0 *pour limite si pour tout nombre positif* ε *aussi petit que l'on veut, existe un nombre naturel* N *tel que l'inégalité* $n > N$ *entraîne*

$$| z_n - z_0 | < \varepsilon.$$

Géométriquement cette définition signifie que quelque petit que soit ε, on affirme que tous les points de la suite $\{z_n\}$ seront, à partir d'un certain N, compris dans un disque de centre z_0 et de rayon ε. Si la suite $\{z_n\}$ a pour limite z_0 on écrit

$$\lim z_n = z_0 \quad \text{ou} \quad z_n \to z_0.$$

Une suite possédant une limite est dite *convergente*. Une suite $\{z_n\}$ est *bornée* si existe un nombre M tel que $| z_n | < M$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Toute suite convergente est forcément bornée. Tous les théorèmes démontrés sur les limites en analyse des fonctions d'une variable réelle s'étendent à l'analyse complexe sans changement. Dans le plan réel, on distingue deux points à l'infini: $+\infty$ et $-\infty$. Dans le plan complexe, il n'existe qu'un point à l'infini désigné par ∞. Une suite de nombres complexes $\{z_n\}$ admet une limite infinie, i.e.

$$\lim z_n = \infty \quad \text{ou} \quad z_n \to \infty,$$

si pour tout nombre positif M aussi grand que l'on veut on peut exhiber un nombre N tel que $n > N$ entraîne $| z_n | > M$. Dans le plan complexe, la relation $z_n \to \infty$ équivaut à $\lim | z_n | = \infty$ ou $\lim \left| \frac{1}{z_n} \right| = 0$. Géométriquement $\lim z_n = \infty$ veut dire que quelque grand que soit le rayon M du disque centré en l'origine des coordonnées, tous les points z_n seront situés à son extérieur à partir de l'un d'eux.

3. Quelques notions géométriques. Arrêtons-nous sur quelques notions géométriques qui joueront un rôle important dans la suite.

Définition 2. *On appelle* ε*-voisinage d'un point* z_0 *le disque de rayon* ε *centré en* z_0, *i.e. l'ensemble de tous les points* z *tel que* $| z - z_0 | < \varepsilon$.

Définition 3. *On appelle domaine du plan complexe un ensemble* D *de points qui est*

1) *ouvert, i.e. qui renferme tout point avec son voisinage;*

2) *connexe, i.e. deux points quelconques de* D *peuvent être joints par une ligne polygonale située toute entière dans* D.

Comme exemple simple de domaine citons les ε-voisinages des points du plan complexe.

Définition 4. *On appelle point frontière d'un domaine* D *un point n'appartenant pas à* D, *mais dont tout voisinage contient des points de* D.

Définition 5. *On appelle frontière du domaine* D *l'ensemble de tous les points frontières de* D.

Définition 6. *On appelle domaine fermé* $\bar{D}$ *la réunion de* D *et de sa frontière* Γ.

Nous allons examiner ici des domaines dont les frontières sont composées d'un nombre fini de lignes fermées c_i, de coupures γ_j et de points α_k (fig. 3) (nous ne définirons pas ces notions). Les lignes et coupures sont supposées différentiables par morceaux,

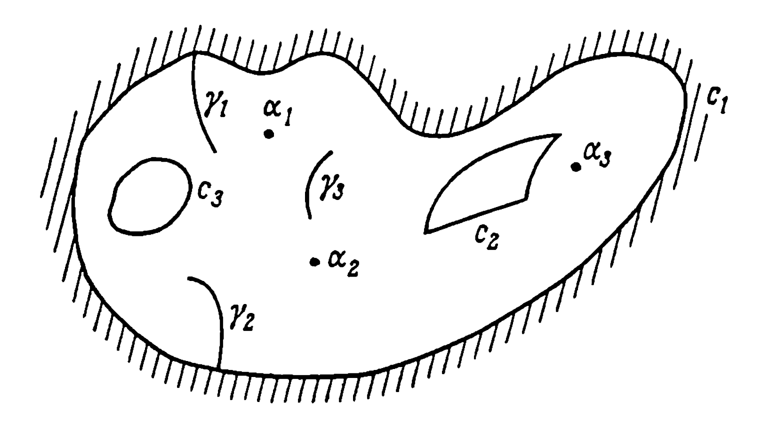


Fig. 3

c'est-à-dire composées d'un nombre fini d'arcs différentiables par morceaux (i.e. d'arcs à tangente continûment variable).

Définition 7. *On dit qu'un domaine D est borné s'il appartient à un disque* $|z| < R$.

Définition 8. *On appelle ordre de connexité d'un domaine borné D le nombre de parties connexes qui composent sa frontière.*

Définition 9. *On appelle domaine simplement connexe un domaine à frontière connexe, i.e. composée d'une partie connexe.*

Définition 10. *On appelle sens positif de parcours de la frontière d'un domaine simplement connexe le sens qui laisse ce domaine à gauche.*

4. Limite, continuité, dérivée d'une fonction d'une variable complexe. Les définitions de la limite d'une fonction $f(z)$ lorsque $z \to z_0$, de sa continuité et de sa dérivée se calquent sur le cas réel.

Supposons que la fonction $w = f(z)$ est définie et univalente en un voisinage du point $z_0 = x_0 + iy_0$ sauf peut-être en le point z_0.

Définition 11. *La fonction $f(z)$ admet une limite pour $z \to z_0$, notée* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, *si existent les limites*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \quad et \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0\,;$$

et de plus

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0.$$

Définition 11 (en termes d'ε-voisinage). *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *est que quel que soit* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour tous les points de* δ-voisinage (sauf peut-être au point z_0) *les points correspondants w soient situés dans ε-voisinage du point w_0, i.e. l'inégalité* $0 < |z - z_0| < \delta$ *implique* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Les relations

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0, \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

se définissent comme plus haut pour la limite d'une suite.

Définition 12. *Une fonction $f(z)$ est continue en z_0 si elle est définie en un voisinage de ce point (y compris au point z_0) et $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Il est évident qu'une condition nécessaire et suffisante de continuité de la fonction $f(z)$ est que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$

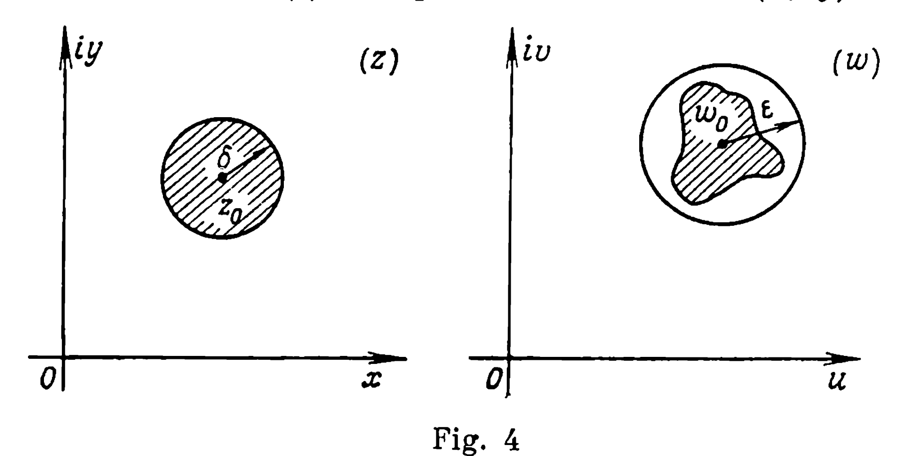


Fig. 4

soient continues au point (x_0, y_0). Autrement dit, la fonction $f(z)$ est dite continue au point z_0 si quelque petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'image du disque $|z - z_0| < \delta$ soit contenue à l'intérieur du disque de centre $w_0 = f(z_0)$ et de rayon ε dans le plan (w) (fig. 4), i.e. $|z - z_0| < \delta$ entraîne $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Définition 13. *Une fonction $f(z)$ est continue sur un domaine D si elle est continue en chaque point de ce domaine.*

Les fonctions continues sur des domaines fermés ainsi que sur des lignes fermées ou des intervalles de lignes fermées jouissent des propriétés ordinaires des fonctions continues sur des intervalles fermés, plus exactement, toute fonction $w = f(z)$ continue et bornée sur un ensemble fermé $\overline{D}$ prend sa plus grande et sa plus petite valeur en module et est uniformément continue sur $\overline{D}$.

La dérivée d'une fonction d'une variable complexe se définit comme en analyse. Soit l'expression

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \tag{1.1}$$

où $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ (fig. 5).

Si l'expression (1.1.) admet une limite lorsque $\Delta z \to 0$, la fonction $f(z)$ est dérivable au point z et admet en ce point une dérivée égale à cette limite, notée

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

La limite ne dépend pas du chemin suivant lequel le point $z + \Delta z$ tend vers z. En d'autres termes, la limite ne dépend pas de la « façon » dont l'accroissement Δz tend vers zéro. Dans le domaine complexe il existe une grande latitude dans le choix de ces « façons », c'est pourquoi la propriété de dérivabilité d'une fonction d'une variable complexe est bien plus rigide que la condition de dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. La condition de dérivabilité dans le domaine complexe entraîne immédiatement l'existence des dérivées de tous les ordres.

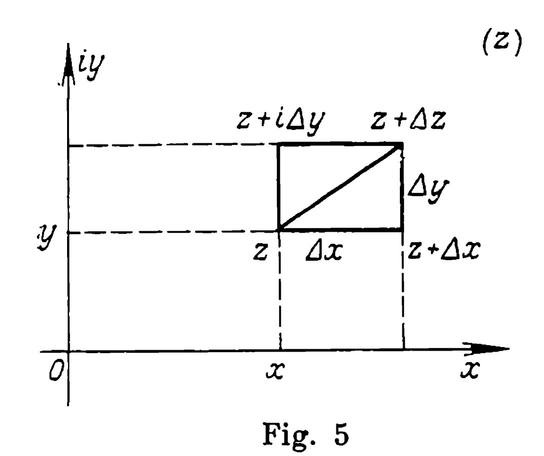


Fig. 5

Considérons deux chemins (cf. fig. 5) suivant lesquels le point $z + \Delta z$ tend vers z: 1) $\Delta y = 0$, i.e. lorsque $\Delta x \to 0$ le point $z + \Delta z \to \to z$ sur une droite parallèle à l'axe Ox; 2) $\Delta x = 0$, i.e. lorsque $\Delta y \to \to 0$ le point $z + \Delta z \to z$ sur une droite parallèle à l' axe imaginaire, et établissons les corollaires découlant de la condition d'indépendance de la limite par rapport au chemin suivant lequel $z + \Delta z$ tend vers z. Représentons la fonction $w = f(z)$ par la somme $w = = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et supposons que les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ possèdent au point (x, y) des dérivées partielles continues du premier ordre. Soit la relation

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)-iv(x,\ y)}{\Delta x+i\Delta y}.$$

En faisant $\Delta y = 0$, on obtient

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,\ y)+iv(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)-iv(x,\ y)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,\ y)-v(x,\ y)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.2)$$

En faisant $\Delta x = 0$, il vient

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,\ y+\Delta y)+iv(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)-iv(x,\ y)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{\Delta y}=$$

$$=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (1.3)$$

Les équations (1.2) et (1.3) entraînent

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.4)$$

Les relations (1.4) qui doivent être vérifiées par les dérivées partielles des parties réelle et imaginaire de la fonction $f(z)$ traduisent mieux que toute autre la condition de dérivabilité d'une fonction d'une variable complexe.

Les équations (1.4) s'appellent *conditions de Cauchy-Riemann.* Il est aisé de montrer qu'on est conduit à ces conditions quel que soit le chemin suivant lequel $z + \Delta z$ tend vers z.

Définition 14. *Une fonction $f(z)$ dérivable en tout point d'un domaine D est dite analytique ou holomorphe (on dit encore régulière ou monogène) dans ce domaine.*

Si la fonction $f(z) = u + iv$ est analytique dans un domaine D, il existe les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ qui partout dans D vérifient les équations (1.4).

La définition d'une fonction analytique suppose son univocité dans le domaine D. Les propriétés ordinaires de la dérivation sont valables puisque la définition de la dérivée $f'(z)$ coïncide formellement avec celle de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle et que les propriétés ordinaires des opérations algébriques et le passage à la limite se généralisent aux fonctions d'une variable complexe. On a

$$\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z), \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)\, g(z)] = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z), \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)\, f'(z) - g'(z)\, f(z)}{[g(z)]^2}, \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dz} F(f(z)) = \frac{d}{df} F(f)\, f'(z). \tag{1.8}$$

Les formules (1.2) et (1.3) entraînent aussitôt

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.9}$$

5. Liens entre fonctions analytiques et fonctions harmoniques. Une fonction $u(x, y)$ de deux variables réelles définie dans un domaine D est par définition *harmonique* *) si elle possède des dérivées partielles secondes continues et vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann entraînent immédiatement que les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(z) = u(x, y) +$

*) Les fonctions harmoniques de trois variables vérifiant l'équation $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ jouent un rôle aussi important.

$+ iv(x, y)$ analytique univoque dans le domaine D sont harmoniques dans D. Deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ harmoniques dans D et vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann sont dites *conjuguées*. Soient données, par exemple, les fonctions analytiques:

$$f(z) = z = x + iy, \quad f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

$$f(z) = z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

En vertu de ce qui précède, les fonctions

$$x,\ y,\ x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad x^3 - 3xy^2, \quad 3x^2y - y^3$$

sont harmoniques.

Inversement, si est donnée une fonction $u(x, y)$ harmonique dans un domaine simplement connexe D, en appliquant les conditions de Cauchy-Riemann on peut lui trouver sa conjuguée harmonique $v(x, y)$ et, partant, la fonction analytique $f(z) = u + iv$. Soit donnée, par exemple, la fonction harmonique

$$u(x, y) = e^x \cos y.$$

La première des conditions de Cauchy-Riemann donne

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y,$$

d'où

$$v(x, y) = \int e^x \cos y\, dy = e^x \sin y + G(x).$$

La seconde donne

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + G'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y,$$

d'où il vient

$$G'(x) = 0, \text{ i.e. } G(x) = c \ (c \text{ est une constante}).$$

Posant $c = 0$, on obtient

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

On est ainsi conduit à la fonction analytique

$$w = f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z,$$

i.e. on obtient une fonction exponentielle prolongée dans le domaine complexe. Comme

$$e^{n2\pi i} = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

il vient

$$e^z = e^{z + n2\pi i} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

d'où il suit que dans le domaine complexe, la fonction exponentielle est périodique et de période $2\pi i$. En vertu de (1.9) sa dérivée est

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = \frac{\partial e^z}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial e^z}{\partial y} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Dans le domaine complexe, les fonctions trigonométriques se définissent comme suit:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

La formule

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

qui lie des fonctions trigonométriques à la fonction exponentielle s'appelle *formule d'Euler*.

A signaler une importante propriété géométrique des composantes harmoniques $u(x, y)$ et $v(x, y)$ de la fonction analytique $f(z)$. Les équations $u(x, y) = c_1$ et $v(x, y) = c_2$ sont les équations de deux familles de courbes à un paramètre du plan (x, y), dont les pentes sont données par

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}},$$

d'où en vertu de la condition de Cauchy-Riemann (1.4), il vient

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1,$$

i.e. les familles de courbes $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$ forment un système de trajectoires orthogonales.

6. Intégrale d'une fonction d'une variable complexe. La notion d'intégrale de fonction d'une variable complexe est capitale dans l'étude des propriétés des fonctions analytiques. Soit donnée dans un domaine D du plan complexe (z) la fonction univoque et continue $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et une courbe arbitraire c dérivable par morceaux appartenant à D avec ses extrémités A et B. Divisons c de façon arbitraire en petites portions par les points $z_0 = A, z_1, \ldots, z_n = B$ et considérons la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k, \tag{1.10}$$

où $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ et $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ est un point arbitraire de la portion (z_{k-1}, z_k). La somme (1.10) s'appelle *somme intégrale* de la fonction $f(z)$ calculée pour la présente subdivision de la courbe c et le choix en question des points ζ_k.

Définition 15. *On appelle intégrale de la fonction $f(z)$ le long de la courbe c et on note*

$$\int_c f(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \tag{1.11}$$

la limite des sommes intégrales (1.10) *calculée pour une partition arbitraire de c sous réserve que* $\max_{k=1,2,\ldots,n} |\Delta z_k| \to 0$.

Sous les conditions imposées à la fonction $f(z)$ et la courbe c cette limite existe toujours et ne dépend ni de la partition ni du choix des points ζ_k (théorème d'existence de l'intégrale). En effet, en partageant l'intégrale (1.11) en parties réelle et imaginaire on aura

$$\int_c f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k \eta_k)\,\Delta y_k\} +$$

$$+ i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\}.$$

D'où en vertu de théorèmes connus d'analyse on peut mettre l'intégrale (1.11) sous la forme d'une somme de deux intégrales curvilignes de fonctions d'une variable réelle

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i \int_c (v\,dx + u\,dy). \tag{1.12}$$

Soit $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ l'équation paramétrique de la courbe c, avec $z(t_1) = A$, $z(t_2) = B$. En vertu de (1.12) et en supposant

$$f(z) = f[x(t) + iy(t)]; \; dz = [x'(t) + iy'(t)]\,dt = z'(t)\,dt,$$

il vient

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

De (1.12) il résulte visiblement que les intégrales de fonctions d'une variable complexe jouissent des propriétés usuelles des intégrales curvilignes. En particulier,

$$\int_c \{af(z) + bg(z)\}\,dz = a \int_c f(z)\,dz + b \int_c g(z)\,dz, \tag{1.13}$$

$$\int_{c_1+c_2} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz, \tag{1.14}$$

$$\int_c f(z)\,dz = -\int_{\bar{c}} f(z)\,dz, \tag{1.15}$$

où a et b sont des constantes complexes, $c_1 + c_2$ la courbe, $\bar{c}$ la courbe confondue avec c mais parcourue dans le sens inverse.

Enonçons encore une propriété de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe susceptible d'être utilisée dans l'étude des intégrales

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| \leqslant \int_c |f(z)|\,|dz| \leqslant Ml, \tag{1.16}$$

où $M = \max |f(z)|$ sur la courbe c et l est la longueur de cette courbe.

On s'assure sans peine que s'agissant de fonctions arbitraires d'une variable complexe, la valeur de l'intégrale dépend du chemin d'intégration. En effet, soient $f(z) = x$, $z = x + iy$ et c_1, c_2 deux chemins d'intégration (fig. 6), c_1 étant composé d'une ligne polygonale dont le premier segment est le segment $(0, a)$, et le second $(a, a + ib)$, c_2 d'une ligne polygonale dont le premier segment est $(0, ib)$, et le second $(ib, a + ib)$. Les calculs montrent que

$$\int_{c_1} x\,dz = \frac{a^2}{2} + iba\,; \quad \int_{c_2} x\,dz = \frac{a^2}{2}$$

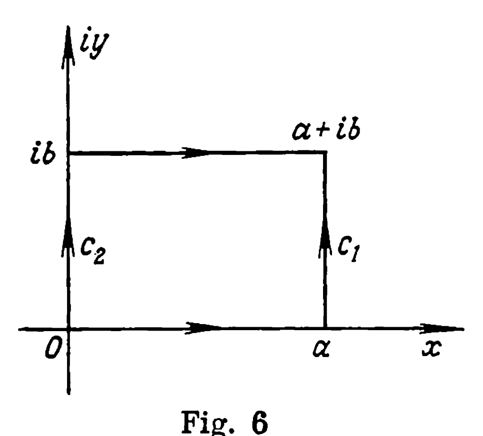


Fig. 6

Supposons maintenant que $f(z)$ est analytique dans le domaine D et, par conséquent, remplit les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Les fonctions figurant sous le signe d'intégration dans les intégrales

$$J_1 = \int_c (u\,dx - v\,dy) \quad \text{et} \quad J_2 = \int_c (v\,dx + u\,dy)$$

de (1.12) peuvent être représentées par des différentielles totales

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy\,; \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy,$$

où

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v\,; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v\,; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u.$$

D'où il vient que les intégrales J_1 et J_2 de (1.12) et partant $\int_c f(z)\,dz$ ne dépendent pas du chemin d'intégration. Ce fait remarquable constitue le *théorème de Cauchy* suivant.

Théorème 1. *Si $f(z)$ est une fonction analytique en tout point d'une domaine simplement connexe D les intégrales étendues à un chemin quelconque joignant deux points de D sont égales.*

Si A et B sont deux points quelconques du domaine D, c_1 et c_2 deux chemins arbitraires joignant ces deux points, alors on a l'égalité (fig. 7):

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz. \tag{1.17}$$

Le théorème de Cauchy permet tout d'abord d'introduire l'intégrale indéfinie d'une fonction analytique. En effet, fixons le point A et étendons l'intégrale à un contour joignant A à z

$$F(z) = \int_A^z f(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.18}$$

On peut étendre l'intégration à tout chemin joignant A à z, puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin et, par conséquent, ne dépend

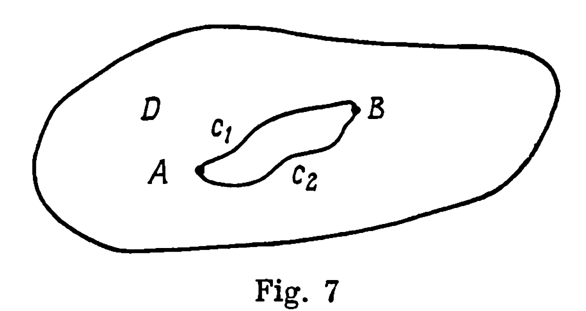


Fig. 7

que de z. La fonction $F(z)$ s'appelle *intégrale indéfinie* de $f(z)$. L'intégrale indéfinie de $f(z)$ possède une dérivée égale à $f(z)$. Dans nombre d'applications il est plus commode d'utiliser le théorème de Cauchy sous une formulation légèrement différente.

Théorème 1′. *Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe, Γ un contour simple fermé contenu dans ce domaine, on a*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Soit donné dans un domaine multiplement connexe D (fig. 8) un contour fermé simple c_0 i.e. un contour sans point double, comprenant en son intérieur les contours fermés simples $c_1, c_2, \ldots, c_n$

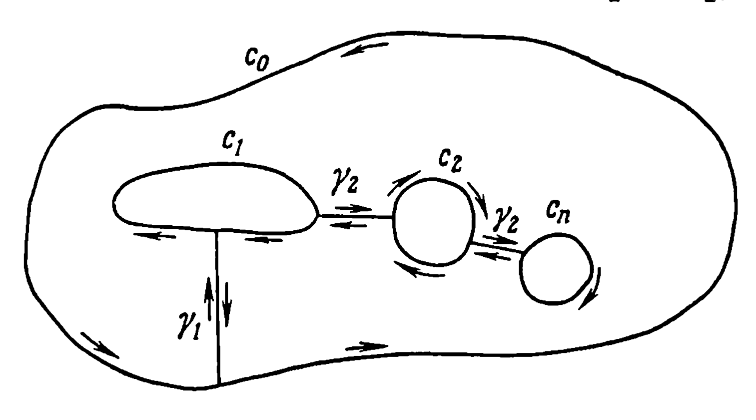


Fig. 8

extérieurs mutuellement l'un à l'autre. Si l'on suppose que la fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine $(n+1)$-connexe limité par le contour c_0 parcouru dans le sens positif et les c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$

parcourus dans le sens négatif, on aura

$$\int_{c_0} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{c_n} f(z)\,dz. \qquad (1.19)$$

La formule (1.19) traduit le théorème de Cauchy pour un domaine multiplement connexe. En effet, si l'on procède aux coupures $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ comme l'indique la figure 8, le domaine multiplement connexe devient simplement connexe. En intégrant le long du contour fermé indiqué par les flèches (cf. fig. 8) et tenant compte de ce que les intégrales prises sur les coupures s'annulent car celles-ci sont parcourues dans des sens inverses, on obtient la formule (1.19).

A noter que les domaines dont l'intérieur renferme les contours c_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) peuvent appartenir ou non au domaine d'analyticité de $f(z)$.

Le théorème de Cauchy permet de déduire la *formule de Cauchy* fondamentale suivante qui donne l'expression d'une fonction analytique aux points intérieurs d'un contour fermé à l'aide des valeurs prises par cette fonction sur le contour en question

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \qquad (1.20)$$

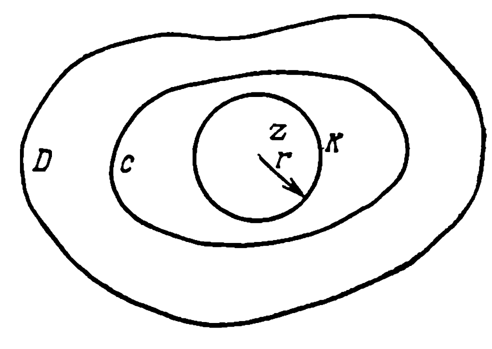


Fig. 9

Démontrons cette formule. Soit c (fig. 9) un contour fermé simple contenu entièrement dans un domaine simplement connexe D dans lequel $f(z)$ est analytique, z un point fixe du domaine limité par le contour c. La fonction à intégrer dans (1.20) est analytique dans le domaine D sauf en $\zeta = z$. Eliminons ce point en l'entourant d'un cercle k de centre z et de rayon r. La fonction considérée étant analytique dans la couronne limitée par c et k, on a en vertu du théorème de Cauchy

$$\int_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{k} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{k} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Dans les intégrales étendues au contour k, ζ est un point frontière du cercle $|\zeta - z| = r$ de sorte que $\zeta = r + re^{i\varphi}$, $d\zeta = ire^{i\varphi}$ et

$$\int_{k} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = if(z) \int_{0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi i f(z).$$

S'agissant de la deuxième intégrale, en vertu de l'inégalité (1.16) on aura

$$\left| \int_{k} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \right| \leqslant 2\pi r \max \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right| = 2\pi \max |f(z) - f(\zeta)|.$$

La fonction $f(z)$ étant continue, la différence $|f(z)-f(\zeta)|$ tend vers zéro avec $r \to 0$, donc, $\int\limits_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z)$ ou

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \qquad (1.21)$$

La formule de Cauchy est la clé de voûte de la théorie des fonctions d'une variable complexe. En l'appliquant on démontre sans peine que la relation aux différences

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)}\, d\zeta$$

tend vers la dérivée

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta,$$

lorsque $\Delta z \to 0$. De là on déduit la formule intégrale générale de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (1.22)$$

De là découle l'une des principales propriétés des fonctions analytiques savoir qu'une fonction analytique est dérivable autant de fois que l'on veut et son expression et celle de ses dérivées sont données par la formule (1.22) en fonction de ses valeurs à la frontière. Donc l'analyticité d'une fonction de variable complexe dans un domaine fermé simple entraîne l'existence de toutes les dérivées d'ordre supérieur.

Soit dans (1.22) z le centre du disque c de rayon ρ contenu dans D, $M(\rho)$ le maximum du module de la fonction $f(z)$ sur c. On obtient alors la majoration suivante pour le module de la fonction et de ses dérivées:

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!\,M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}}\, 2\pi\rho = \frac{n!\,M(\rho)}{\rho^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.23)$$

Ces inégalités s'appellent *inégalités de Cauchy.*

En vertu de la formule de Cauchy, les valeurs d'une fonction analytique à l'intérieur du domaine s'expriment à l'aide des valeurs prises par cette fonction sur le contour de ce domaine. Ajoutons à cela qu'une fonction analytique est entièrement définie par ses valeurs sur une suite quelconque de points convergeant en un point intérieur du domaine où elle est analytique.

Théorème 2. *Soient données deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ analytiques dans un domaine D et prenant les mêmes valeurs en une suite de points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ convergeant vers $a \in D$ lorsque $n \to \infty$. On a $f(z) = \varphi(z)$ partout dans D. En particulier, ces fonctions sont confondues dans le domaine D si $f(z) = \varphi(z)$ sur un segment appartenant à D.*

A noter que ce théorème appelé *théorème d'unicité* est partie intégrante d'un cercle de problèmes étroitement liés à l'une des plus importantes notions de la théorie des fonctions d'une variable complexe, la notion de prolongement analytique. Le problème du prolongement analytique consiste en ce qui suit. Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D' contenu dans un domaine D. On demande une fonction $F(z)$ analytique dans D et coïncidant avec $f(z)$ dans D'. En vertu du théorème d'unicité, si cette fonction existe, elle est unique.

7. Séries de Taylor. Les séries de nombres et de fonctions sont etudiées en théorie des fonctions d'une variable complexe et d'une variable réelle. En outre les principales notions établies dans le domaine réel se transposent au domaine complexe.

C'est notamment le cas de la convergence absolue, de la convergence uniforme, des séries entières. Supposons, par exemple, que

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \tag{1.24}$$

est une série de fonctions de variable complexe, définies sur un ensemble de points E,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$$

la somme partielle des $n+1$ premiers termes de cette série. On dit que la série (1.24) est *uniformément convergente* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N(\varepsilon)$ dépendant uniquement de ε tel que pour $n > N(\varepsilon)$ l'on ait

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

quel que soit m naturel en tous les points de l'ensemble E. Désignons

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la série (1.24) soit uniformément convergente sur l'ensemble E est que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N(\varepsilon)$ dépendant seulement de ε, tel que pour tous les $n > N(\varepsilon)$, on ait

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

en un point quelconque $z \in$ E.

Contrairement à la convergence uniforme d'une série de fonctions dans un domaine D, la convergence d'une série de fonctions sur tout

ensemble fermé borné de points de ce domaine est très importante. On dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ est uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine D si elle est uniformément convergente dans un domaine fermé quelconque $D^* \subset D$. Toute série uniformément convergente dans D l'est sur chaque partie fermée D^* de D.

Le théorème suivant dû à Abel (1837) définit le domaine de convergence d'une série entière.

Théorème 1. *Si la série entière*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu, \tag{1.25}$$

où a_ν sont des nombres complexes, est convergente au moins en un point $z_1 \neq z_0$, il existe un disque de rayon R et de centre z_0 tel que la série (1.25) *est convergente à l'intérieur du disque $|z - z_0| < R$ et divergente à l'extérieur du disque $|z - z_0| > R$. Sur le cercle $|z - z_0| = R$ la série peut être ou convergente ou divergente.*

Le nombre R s'appelle *rayon de convergence* de la série entière. Lorsque le disque de convergence couvre le plan complexe tout entier, i.e. la série (1.25) est convergente pour tous les z finis, on pose $R = \infty$. Si le disque de convergence se réduit à un point, i.e. la série (1.25) n'est convergente en aucun point autre que $z = z_0$, on pose $R = 0$. En vertu du théorème de Cauchy-Hadamard le rayon de convergence d'une série entière vaut

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

où $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ est la limite supérieure de la suite $|a_1|$, $\sqrt[2]{|a_2|}$, $\sqrt[3]{|a_3|}$, ...

La série entière converge absolument et uniformément dans tout disque $|z - z_0| \leqslant R_1 < R$. A l'intérieur du disque $|z - z_0| < R$, la série (1.25) est une fonction analytique $f(z)$, quant à la série obtenue par intégration terme à terme de (1.25) le long d'un chemin entièrement contenu dans le disque de convergence, elle converge et n'est autre que l'intégrale de la fonction $f(z)$. La dérivée se déduit par dérivation de la série entière. Un exemple élémentaire de série entière est la progression géométrique

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n + \ldots \tag{1.26}$$

La série (1.26) est convergente pour $|z| < 1$ et sa somme vaut

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Le rayon de convergence de (1.26) est égal à l'unité.

Théorème 3 (de Weierstrass). *Si les termes de la série*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{1.27}$$

uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine D sont analytiques dans ce domaine, la somme de la série de $f(z)$ *est également analytique dans D. Par ailleurs, les séries*

$$f_0^k(z) + f_1^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots, \tag{1.28}$$

obtenues par une k-uple dérivation terme à terme de la série (1.27) sont également uniformément convergentes à l'intérieur de D et représentent les dérivées d'ordre k de la somme de la série de $f(z)$ *dans D.*

Le développement des fonctions analytiques en séries entières se base sur le théorème suivant.

Théorème 4. *Toute fonction* $f(z)$ *analytique dans un disque* $|z - z_0| < R$ *centré en* z_0 *est susceptible d'être représentée à l'intérieur de ce disque par la série de Taylor*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, \tag{1.29}$$

où

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}, \tag{1.30}$$

et ce développement est unique. Ici c_0 *est un cercle de centre* z_0 *et de rayon* $R_0 < R$.

En vertu de la formule intégrale de Cauchy (1.22), en un point quelconque $z \neq z_0$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{1.31}$$

où le point z est intérieur au contour c_0. Sur c_0 on a $|\zeta - z_0| = R_0$ et, d'autre part, $|z - z_0| < R_0$, puisque z est intérieur à c_0. Utilisons le développement

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^\nu. \tag{1.32}$$

Comme $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leqslant q < 1$, la série (1.32) est uniformément convergente en ζ situés sur c_0. Multiplions les deux membres de (1.32) par $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ et intégrons terme à terme sur la courbe c_0. En vertu de la formule (1.31), on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z - z_0)^\nu \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}\, d\zeta,$$

ou

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu,$$

où, en vertu de la formule de Cauchy (1.22)

$$a_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{\nu+1}}\,d\zeta=\frac{f^\nu(z_0)}{\nu\,!}. \qquad (1.33)$$

Le développement de $f(z)$ en la série de Taylor (1.29) est unique, puisque les coefficients a_ν sont définis de façon unique. En effet, en faisant $z = z_0$ dans (1.29), on obtient $a_0 = f(z_0)$. Dérivant la série entière (1.29), on aura

$$f'(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (\nu)(z-z_0)^{\nu-1}.$$

En posant $z=z_0$, on trouve $a_1=f'(z_0)$.

De façon analogue, il vient

$$a_\nu=\frac{f^\nu(z_0)}{\nu\,!}, \qquad (1.34)$$

et les coefficients (1.34) sont confondus avec (1.33).

Donc, si l'on développe une fonction en série entière suivant les puissances $(z - z_0)$ par deux méthodes différentes, les coefficients des deux développements en les mêmes puissances de $(z - z_0)$ se confondent et sont ceux de la série de Taylor.

On remarquera que le point $z = z_0$ en lequel $f(z_0) = 0$ s'appelle *zéro de la fonction* $f(z)$. Supposons que la fonction analytique $f(z)$ est non identiquement nulle au voisinage de son zéro z_0. On appelle *ordre du zéro* z_0 l'indice du premier coefficient non nul de la série de Taylor de la fonction $f(z)$ au point z_0. La fonction figurant sous le signe d'intégration de (1.31) étant partout analytique dans le disque de convergence c de centre z_0 et de rayon R, sauf en $\zeta = z_0$, on peut déformer le contour c_0 en un contour fermé quelconque entourant le point z_0 et entièrement contenu dans le disque de convergence c.

On appelle *entière* une fonction dont la série de Taylor est partout convergente (quel que soit z fini).

8. Séries de Laurent et points singuliers. Etudions maintenant les fonctions d'une variable complexe non analytique en tous les points de leur domaine de définition. On considérera des fonctions univoques aux points en lesquels ne sont pas remplies les conditions de Cauchy-Riemann. Ces points sont appelés *points singuliers*. Soit une fonction univoque $f(z)$, analytique dans le domaine D, limitée par deux cercles concentriques de rayons R et r ($r \in \,]\,R,\ 0\,[$) et de centre z_0. Traçons deux cercles concentriques k_1 et K_1 de centre z_0 et respectivement de rayons r_1 et R_1, $0 < r < r_1 < R$ (fig. 10).

La fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine doublement connexe D_1 limité par les cercles k_1 et K_1 et sur ces cercles. Si l'on transforme le domaine doublement connexe D_1 en un domaine simplement connexe en effectuant la coupure mn et que l'on applique la formule intégrale de Cauchy pour tout z non situé sur cette coupure, on obtient

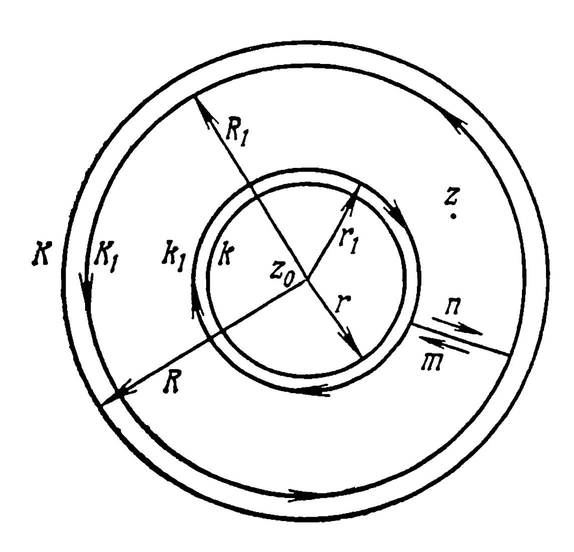


Fig. 10

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \qquad (1.35)$$

La coupure mn étant quelconque, la formule (1.35) vaut pour tous les z du domaine D_1. Dans la première intégrale du second membre de (1.35), développons $\frac{1}{\zeta-z}$ en la série

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{\nu}, \qquad (1.36)$$

qui est uniformément convergente en les ζ situés sur le cercle K_1 puisque c'est une progression géométrique de raison $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = q_1 < 1$. Dans la deuxième intégrale développons $\frac{1}{\zeta-z}$ en la série

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{\nu}, \qquad (1.37)$$

qui est aussi uniformément convergente en les ζ situés sur le cercle k_1 puisque c'est une progression géométrique de raison $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = q_2 < 1$. Portant (1.36) et (1.37) respectivement dans la première et la seconde intégrales de (1.35) et intégrant terme à terme, on obtient

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(z-z_0)^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{\nu+1}}\,d\zeta+\sum_{\nu=0}^{\infty}(z-z_0)^{-\nu-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{\nu}\,d\zeta,$$

ou

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu, \tag{1.38}$$

où

$$a_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-\nu+1}} d\zeta \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.39}$$

Le développement (1.38) avec les coefficients (1.39) de la fonction $f(z)$ s'appelle *série de Laurent.* Si la fonction $f(z)$ est analytique dans le disque k_1, en vertu du théorème de Cauchy tous les $a_{-\nu} = 0$ et la série de Laurent coïncide avec celle de Taylor. La fonction $f(z)$ étant analytique à l'intérieur de D, en vertu du théorème de Cauchy, on peut remplacer le contour d'intégration le long des cercles K_1 et k_1 par un contour K entièrement contenu dans D et parcouru dans le sens direct. En groupant les deux termes dans (1.38) on obtient la proposition importante suivante.

Théorème 5 (de Laurent). *Toute fonction $f(z)$ analytique dans le domaine D, $r < |z - z_0| < R$ est représentable dans ce domaine par une série convergente de Laurent*

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu,$$

où

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta. \tag{1.40}$$

Donc, le domaine de convergence de la série de Laurent est la plus grande couronne D où $f(z)$ est encore analytique. Ceci étant les frontières de ce domaine contiennent au moins un point singulier chacune. Le cas le plus intéressant est celui où le centre de ces cercles z_0 est l'unique point singulier de la fonction $f(z)$ à l'intérieur du disque k_1. La série (1.38) est alors convergente pour tous les z tels que $0 < |z - z_0| < R$. On dit alors que le point z_0 est un *point singulier isolé.* La partie $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} (z - z_0)^{-\nu}$ du développement (1.38) est appelée *partie principale de la série de Laurent.* La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ qui est composée de toutes les puissances non négatives du développement est la *partie régulière de la série de Laurent* de la fonction $f(z)$ au voisinage du point z_0. Le point z_0 est appelé *pôle d'ordre m* si la partie principale de la série de Laurent ne contient qu'un nombre fini de termes et en outre a_{-m} est le dernier coefficient non nul. Dans ce cas la série de Laurent s'écrit

$$f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu.$$

Si la partie principale de Laurent contient une suite infinie de termes, le point z_0 est dit *point singulier essentiel*. On dit que le point z_0 est un *point singulier artificiel* si la partie principale de la série de Laurent est identiquement nulle. Dans ce cas elle s'écrit

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu .$$

Donc, si l'on définit la fonction au point z_0, en posant par exemple $f(z_0)=a_0$, la fonction $f(z)$ devient analytique au point z_0 et la « singularité disparaît ».

On appelle *fonction méromorphe* dans un domaine D une fonction holomorphe dans D sauf aux points singuliers qui sont des pôles. Les opérations arithmétiques sur les fonctions méromorphes dans D conduisent à des fonctions méromorphes à la condition que le dénominateur soit différent de zéro dans la division.

Jusqu'ici nous avons étudié les fonctions $f(z)$ de variable complexe dans des domaines susceptibles d'admettre le point à l'infini comme point frontière et non comme point intérieur. La définition de la dérivée en un point z impliquait également la finitude de z. Si un domaine D' contient le point à l'infini, i.e. contient tous les points extérieurs au disque $|z|<R$, les définitions de l'analyticité, du pôle, du point singulier essentiel et du point singulier artificiel restent en vigueur par la transformation $z=\frac{1}{\zeta}$ qui amène le point à l'infini en l'origine des coordonnées. Si $|z|\to\infty$, alors $\zeta\to 0$. La fonction $f(z)$, analytique pour les z finis tels que $|z|>R$, se transforme en une fonction analytique $\varphi(\zeta)$ pour $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$. Si $\varphi(\zeta)$ est analytique aussi pour $\zeta=0$ on dit que la fonction $f(z)$ est analytique à l'infini. Si le point $\zeta=0$ est un pôle d'ordre m, un point singulier essentiel ou un point singulier artificiel de la fonction $\varphi(\zeta)$, on dit que le point à l'infini est respectivement un pôle d'ordre m, un point singulier essentiel ou un point singulier artificiel de la fonction $f(z)$. Le développement en série de Laurent de $f(z)$ dans le domaine $R<|z|<\infty$ est

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^{-\nu}.$$

Le point à l'infini est un point singulier artificiel si $a_\nu=0$ pour $\nu<0$; un pôle d'ordre m si $a_{-m}\neq 0$ $(m<0)$ et $a_\nu=0$ pour $\nu<-m$; un point singulier essentiel si existe une suite infinie de coefficients $a_\nu\neq 0$ à indices négatifs.

Traitons quelques exemples simples. La fonction $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}$ admet en z_0 un pôle d'ordre m. La fonction

$$f(z) = \frac{2z}{z^2-1} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{\nu}$$

possède un pôle d'ordre un aux points $z = 1$ et $z = -1$. A signaler que si la fonction $f(z)$ possède un pôle d'ordre m au point $z = z_0$, sa multiplication par $(z - z_0)^m$ conduit à la fonction $(z - z_0)^m f(z)$ analytique au point $z = z_0$.

Examinons la fonction transcendante entière

$$f(z) = e^{(z)} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

au point à l'infini. Posons $z = \frac{1}{\zeta}$. Il vient

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta) = 1 + \frac{1}{1!\,\zeta} + \frac{1}{2!\,\zeta^2} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\,\zeta^{\nu}}.$$

D'où il suit qu'à l'infini la fonction e^z possède un point singulier essentiel. Les fonctions trigonométriques $\sin z$ et $\cos z$ possèdent également un point singulier essentiel à l'infini. Si une fonction $f(z)$ possède un point singulier essentiel en $z = z_0$, son produit par une puissance quelconque de $(z - z_0)$ n'est pas une fonction analytique en z_0.

Le polynôme

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m, \qquad (a_m \neq 0)$$

est une fonction analytique en tout point fini, possédant à l'infini un pôle dont l'ordre est celui du polynôme puisqu'en posant $\zeta = \frac{1}{z}$ on obtient

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \ldots + \frac{a_m}{\zeta^m}.$$

9. Fonctions multivalentes. Les fonctions élémentaires jouissent souvent de propriétés nouvelles dans le domaine complexe. L'étude des fonctions multivalentes dans le domaine complexe semble présenter le plus d'intérêt.

Soit la fonction $w = \sqrt[n]{z}$. Cette fonction est n-valente. Chacune de ses valeurs est définie par une valeur de l'argument z. Supposons que $\arg z_0$ est une valeur de l'argument z_0 et que le point z décrit

en partant de z_0 une ligne c ne passant pas par l'origine des coordonnées. Désignons par $\arg z$ la valeur de l'argument qui varie continûment à partir de $\arg z_0$.

On distinguera deux cas.

1. La courbe c est fermée et ne contient pas le point $z = 0$ à l'intérieur.

2. La courbe c (notons-la $\tilde{c}$) est fermée et contient le point $z = 0$ à l'intérieur (fig. 11).

Dans le premier cas, lorsque le point z décrit une fois la courbe c, le point $w = \sqrt[n]{z}$, où $\sqrt[n]{z}$ est une valeur choisie de la racine, parcourt

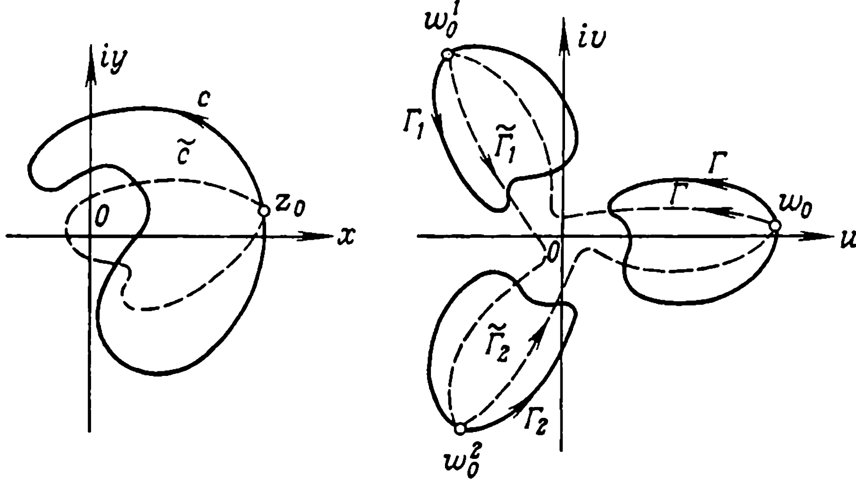


Fig. 11

une fois une courbe fermée Γ. Les autres valeurs de $w = \sqrt[n]{z}$ définies par d'autres valeurs initiales $\arg z_0$ décrivent des courbes fermées distinctes de Γ seulement par une rotation d'un angle de $\frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

Dans le second cas, lorsque le point z décrit entièrement la courbe c dans le sens direct en partant de z_0, le point $w = \sqrt[n]{z}$ ne revient pas à son point de départ, car $\arg z$ subit un accroissement de 2π: le point w occupe une nouvelle position w_0^1, où $w_0^1 = w_0 \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)$ est une valeur de $\sqrt[n]{z_0}$ distincte de w_0. Le point $w = \sqrt[n]{z}$ ne revient à sa position de départ que lorsque la courbe $\tilde{c}$ aura été parcourue n fois. Donc, si le domaine D ne contient aucune courbe fermée entourant le point $z = 0$, on obtient n fonctions continues et univalentes. Ces n fonctions s'appellent *branches de la fonction multivalente* $w = \sqrt[n]{z}$ et chacune de ces branches est une fonction analytique dans D. Si D contient au moins une courbe fermée entourant $z = 0$, il est alors impossible de distinguer les branches de $\sqrt[n]{z}$. Le point $z = 0$ en tout voisinage duquel il est impossible de séparer les n branches univalentes de la fonction $\sqrt[n]{z}$ est appelé *point de ramification* de cette fonction.

La fonction logarithmique est un autre exemple de fonction multivalente. Celle-ci se définit comme la fonction inverse de la fonction exponentielle, de façon plus précise, on dit qu'un nombre w est le logarithme d'un nombre z si $e^w = z$ et l'on note $w = \ln z$. Si $w_1 = \ln z_1$ $w_2 = \ln z_2$, la définition entraîne

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln (z_1 z_2).$$

En posant $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \arg z}$, on obtient

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

où $\arg z$ désigne une valeur quelconque de l'argument z. La partie réelle de $\ln z$ est univalente et définie de façon univoque, la partie imaginaire à $2k\pi$ près. La fonction logarithmique est donc une fonction multivalente. Pour fixer les idées cette fonction multivalente est notée $\operatorname{Ln} z$ de sorte que

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i (\varphi + 2k\pi),$$

où $\ln z$ désigne une valeur quelconque de $\operatorname{Ln} z$.

En contournant le point $z = 0$, on passe (comme pour $w = \sqrt[n]{z}$) d'une branche de la fonction $w = \operatorname{Ln} z$ à une autre en donnant ainsi un accroissement de 2π à la partie imaginaire de cette dernière. Le point $z = 0$ est un point de ramification de la fonction $\operatorname{Ln} z$.

Si le domaine D comprend au moins une courbe fermée entourant le point $z = 0$, les branches de la fonction $\operatorname{Ln} z$ ne peuvent être différenciées. Si le domaine D ne contient pas de courbes fermées entourant le point $z = 0$, on peut distinguer une infinité de branches continues et univalentes de la fonction multivalente $w = \operatorname{Ln} z$.

Donc, si la fonction $f(z)$ est analytique au voisinage d'un point quelconque z_0 et qu'après un tour complet autour de ce dernier ne prenne pas sa valeur initiale mais une nouvelle valeur, la fonction $f(z)$ est multivalente et le point z_0 un point de ramification.

10. Théorème des résidus (de Cauchy). Si une fonction univalente $f(z)$ est analytique en un point fini z_0 et en un de ses voisinages, le théorème de Cauchy donne

$$\int_c f(z)\, dz = 0, \tag{1.41}$$

où c est un contour fermé simple quelconque, entièrement contenu dans le voisinage indiqué précédemment et renfermant z_0.

Supposons maintenant que le point z_0 est un point isolé singulier de la fonction $f(z)$. L'intégrale (1.41) sera généralement non nulle. Cette valeur, ainsi qu'il découle du théorème de Cauchy (cf. § 1, pt. 6). ne dépend pas de la forme du contour c et peut être calculée. En effet, au voisinage du point singulier z_0 $(0 < |z - z_0| < r)$ la

fonction $f(z)$ peut être développée en la série de Laurent

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots, \tag{1.42}$$

uniformément convergente sur c, puisque c est contenu dans le voisinage de z_0.

Intégrant terme à terme (1.42) le long de c et eu égard à

$$\int_c (z-z_0)^m dz=0 \quad (m=0, 1, 2, \ldots);$$

$$\int_c \frac{dz}{z-z_0}=2\pi i;$$

$$\int_c \frac{dz}{(z-z_0)^n}=0 \quad (n=2, 3, \ldots),$$

on obtient la formule

$$\int_c f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}. \tag{1.43}$$

La valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz$ est appelé *résidu* de la fonction $f(z)$ au point singulier z_0. En vertu de (1.43), le résidu est égal à a_{-1}, i.e. au coefficient de la première puissance négative du développement de Laurent. Dans bien des cas la formule (1.43) permet de calculer sans difficultés des intégrales de contour dans le plan complexe, moyennant une décomposition de la fonction $f(z)$ en une série de Laurent au voisinage du point z_0, dont il ne faudra déterminer que le coefficient de la première puissance négative.

Appliquons la série de Laurent au calcul du résidu du point z_0 qui est un pôle du premier ordre. Il vient l'égalité

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\ldots,$$

d'où il suit pour $z\to z_0$ que

$$a_{-1}=\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{1.44}$$

Si au voisinage du point z_0 la fonction $f(z)$ est définie comme le quotient de deux fonctions analytiques en ce point, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, et $\Psi(z_0)$ possède en z_0 un zéro du premier ordre, i.e. $f(z)$ possède en z_0 un pôle du premier ordre, alors eu égard à la décomposition

$$\Psi(z)=(z-z_0)\Psi'(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}\Psi''(z_0)+\ldots,$$

il vient

$$a_{-1}=\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}=\frac{\varphi(z)}{\Psi'(z_0)}. \tag{1.45}$$

Si le point z_0 est un pôle d'ordre m de la fonction $f(z)$, la série de Laurent s'écrit

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+$$

$$+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots=\sum_{\nu=-m}^{\infty}a_\nu(z-z_0)^\nu.$$

Le produit

$$(z-z_0)^m f(z)=\sum_{\nu=-m}^{\infty}a_\nu(z-z_0)^{\nu+m} \tag{1.46}$$

est une fonction analytique au point z_0. Dérivant (1.46) $(n-1)$ fois et passant à la limite lorsque $z\to z_0$ (il est impossible de porter directement $z=z_0$ dans la dérivée, puisque z_0 est un point singulier de $f(z)$), il vient

$$a_{-1}=\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}. \tag{1.47}$$

Pour $m=1$, la formule (1.47) se transforme en (1.44).

Passons maintenant à l'étude du théorème fondamental des résidus. Soient donnés un domaine D dans lequel une fonction $f(z)$ est analytique, un contour c_0 (fig. 12) sans point double contenu

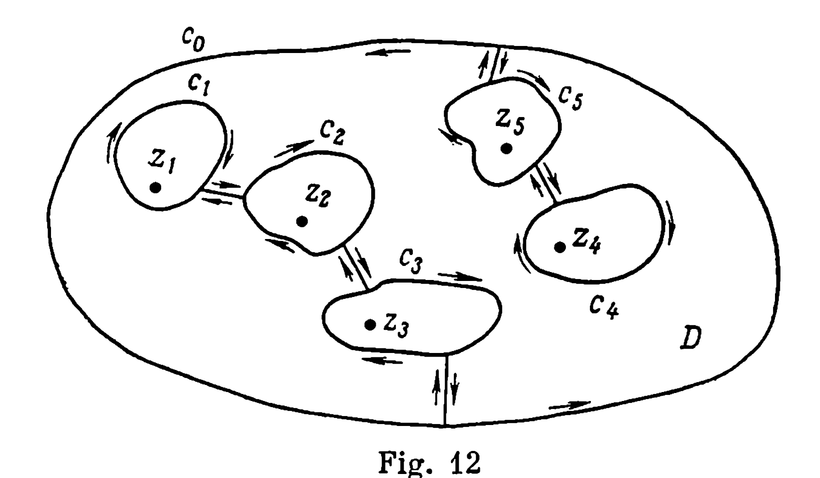


Fig. 12

dans D et à l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ ne possède qu'un nombre fini de points singuliers isolés z_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$). Comprenons chaque point dans de petits contours fermés c_ν entièrement contenus dans le domaine limité par c_0 et extérieurs respectivement

l'un à l'autre. En vertu de (1.19), il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{c_k} f(z)\,dz. \tag{1.48}$$

Dans le second membre de cette égalité on reconnaît la somme des résidus des points singuliers z_ν. La formule (1.48) permet d'énoncer le théorème suivant des résidus.

Théorème 6. *L'intégrale d'une fonction $f(z)$ étendue à un contour fermé c_0, parcouru dans le sens positif et contenu dans un domaine où la fonction est univalente et analytique, sauf en un nombre fini de points singuliers isolés, et ne passant pas par ces points singuliers, est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de tous les points singuliers compris dans c_0, i.e.*

$$\int_{c_0} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_\nu). \tag{1.49}$$

Cet important théorème sera utilisé dans la suite pour l'inversion de l'intégrale de Laplace.

11. Lemmes de Jordan. Pour obtenir des expressions commodes au calcul des intégrales de contour, dans la plupart des cas il importe de déformer dûment le chemin d'intégration. Les *lemmes de Jordan* suivants nous seront très utiles.

Lemme 1. *Désignons les arcs de cercle $|z-\sigma| = R_n$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z-\sigma) \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z-\sigma) \leqslant \frac{3}{2}\pi$ respectivement par c_n et $\tilde{c}_n$. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$. Si une fonction $f(z)$ d'une variable complexe z tend vers zéro uniformément en $\arg z$ lorsque $n \to \infty$ sur c_n* et *$\tilde{c}_n$, alors*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\int_{c_n} f(z)\,e^{zt}\,dz = 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \tag{1.50}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\int_{\tilde{c}_n} f(z)\,e^{zt}\,dz = 0 \quad \text{si} \quad t > 0. \tag{1.51}$$

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $f(z)$ tendant vers zéro uniformément en $\arg z$ sur c_n et $\tilde{c}_n$, il existe un nombre $N(\varepsilon)$ suffisamment grand (dépendant de ε et non de z) tel que l'on a $|f(z)| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$ sur c_n et $\tilde{c}_n$. En tout point $z = \sigma + R_n e^{i\varphi}$ situé sur ces arcs (fig. 13), on aura, eu égard à $|i| = 1$ et $|e^{i\varphi}| = 1$,

$$|dz| = |iR_n e^{i\varphi}\,d\varphi| = R_n d\varphi, \qquad |e^{tz}| = e^{\sigma t} e^{tR_n \cos\varphi}.$$

De l'inégalité

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leqslant \int_c |f(z)|\,|dz|$$

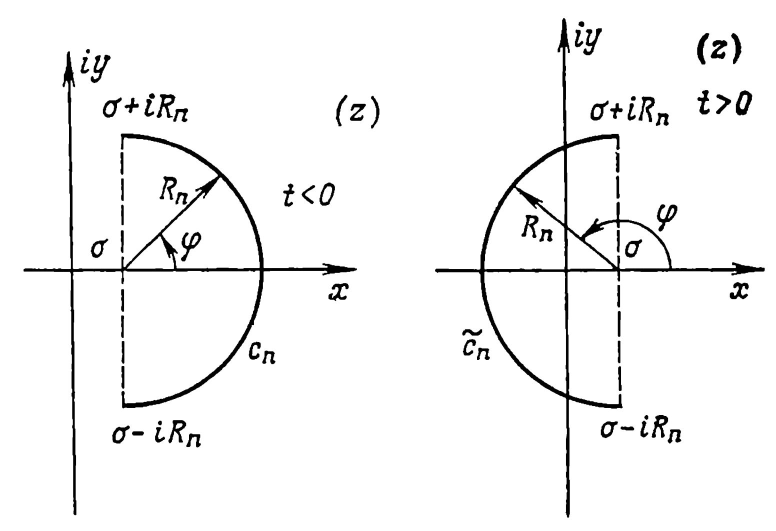


Fig. 13

on déduit la majoration

$$\left|\int_{c_n} f(z)\,e^{tz}\,dz\right| < \varepsilon R_n e^{\sigma t}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\varepsilon R_n e^{\sigma t}\int_0^{\pi/2} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi \qquad (1.52)$$

et

$$\left|\int_{\tilde{c}_n} f(z)\,e^{tz}\,dz\right| < \varepsilon R_n e^{\sigma t}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\varepsilon R_n e^{\sigma t}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi. \qquad (1.53)$$

Pour estimer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi \qquad (t<0)$$

de (1.52), posons $\Psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, d'où il vient

$$\int_0^{\pi/2} e^{tR_n\cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{tR_n\sin\psi}\,d\Psi,\ t<0. \qquad (1.54)$$

Comme

$$\sin \Psi \geqslant \frac{2}{\pi} \Psi, \tag{1.55}$$

dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (cf. fig. 14), on obtient

$$\int_0^{\pi/2} e^{tR_n \cos \varphi} \, d\varphi < \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2tR_n}{\pi} \Psi} \, d\Psi,$$

d'où il suit, pour $t < 0$,

$$\left| \int_{C_n} f(z) \, e^{tz} \, dz \right| < 2\varepsilon R_n e^{\sigma t} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2tR_n}{\pi} \Psi} \, d\Psi =$$

$$= \frac{\varepsilon \pi}{t} e^{\sigma t} (e^{tR_n} - 1) < \frac{\varepsilon \pi}{|t|} e^{\sigma t} < \frac{\varepsilon \pi}{|t|};$$

comme ε est arbitraire, cette expression entraîne la validité de la

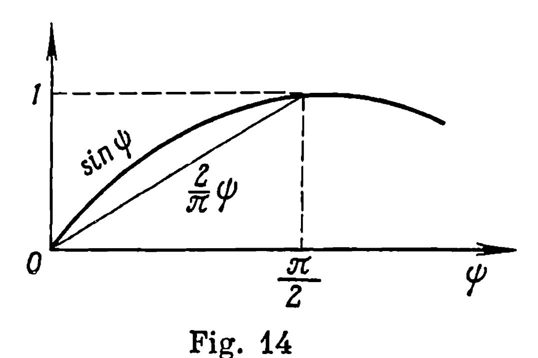


Fig. 14

formule (1.50). Pour majorer l'intégrale

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR_n \cos \varphi} \, d\varphi \quad (t > 0)$$

de (1.53), posons $\Psi = -\frac{\pi}{2} + \varphi$. On aura

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR_n \cos \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-tR_n \sin \Psi} \, d\Psi = \int_0^{\pi/2} e^{(-t)R_n \sin \Psi} \, d\Psi,$$

i.e. on obtient de nouveau l'intégrale (1.54). Donc, pour $t > 0$,

$$\left| \int_{\tilde{C}_n} f(z) \, e^{tz} \, dz \right| < \frac{\varepsilon \pi}{t},$$

ce qui démontre (1.51), puisque ε est arbitraire ■ *).

---

*) Le symbole ■ désigne la fin de la démonstration.

A titre d'exemple montrons que les conditions du lemme de Jordan sont réalisées pour la fonction

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0},$$

où m et n sont des entiers, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $n - m = r > 0$, $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Le changement de z en $\frac{1}{\zeta}$ donne

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta) = \zeta^r \frac{a_m + a_{m-1}\zeta + \ldots + a_0 \zeta^m}{b_n + b_{n-1}\zeta + \ldots + b_0 \zeta^n} = \zeta^r \frac{P_m(\zeta)}{P_n(\zeta)}.$$

Comme $b_n \neq 0$, il existe dans le plan ζ un disque de rayon R_1 de centre $\zeta = 0$ qui ne contient aucun zéro du polynôme $P_n(\zeta)$. Donc pour tous les $|\zeta| < R_1$ on a

$$\left| \frac{P_m(\zeta)}{P_n(\zeta)} \right| < M$$

et $|\varphi(\zeta)| < |\zeta|^r M$, d'où

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^r}.$$

Ceci traduit le fait que la fonction $f(z)$ tend uniformément vers zéro lorsque $z \to \infty$.

La variante suivante du lemme de Jordan est quelquefois plus commode à l'usage.

Lemme 2. *Supposons qu'une fonction $f(z)$ d'une variable complexe z vérifie sur les arcs de cercle* (fig. 15)

$$\Gamma_R : |z| = R, \qquad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$$

l'inégalité

$$|f(z)| < MR^{-k},$$

où $R \geqslant R_0$, M et $k > 0$ sont des constantes, et $\varepsilon = \arcsin \frac{\sigma}{R}$; *alors*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{zt} \, dz = 0, \quad t > 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Ce lemme découlera du précédent si l'on prouve que

$$\lim_{R \to \infty} \left\{ \int_{c_R^+} + \int_{c_R^-} \right\} f(z) e^{zt} \, dz = 0, \quad t > 0, \tag{1.56}$$

où c_R^+ et c_R^- sont les arcs AB et DE du cercle $|z| = R$ (cf. fig. 15)

De l'inégalité

$$\left| \int_{c_R^+} f(z)\, e^{zt}\, dz \right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2} |f(z)|\, e^{t \operatorname{Re} z} R\, d\varphi,$$

où $|(z)| \leqslant \dfrac{M}{R^k}$ et $\operatorname{Re} z \leqslant \sigma$ il vient

$$\left| \int_{c_R^+} f(z)\, e^{zt}\, dz \right| \leqslant \frac{M}{R^k}\, e^{\sigma t} R\varepsilon =$$

$$= \frac{M}{R^k}\, e^{\sigma t} R \arcsin \frac{\sigma}{R}.$$

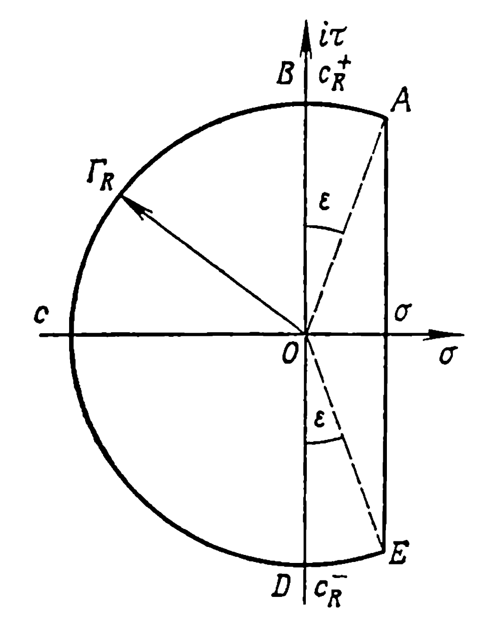
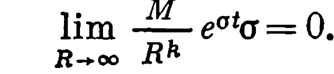


Fig. 15

Lorsque $R \to \infty$, on a

$$\lim_{R\to\infty} R \arcsin \frac{\sigma}{R} = \sigma,$$

donc



$$\lim_{R\to\infty} \frac{M}{R^k}\, e^{\sigma t}\sigma = 0.$$

De façon analogue, on démontrerait que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{c_R^-} f(z)\, e^{zt}\, dz = 0, \quad t > 0. \quad \blacksquare$$

§ 2. Intégrale de Laplace et ses propriétés fondamentales

1. Intégrale de Laplace. Désignons par $f(t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t, définie sur la section $t \in [0, \infty[$ et absolument intégrable sur tout intervalle fini $[0, T]$. On supposera d'autre part que cette fonction est univalente et qu'elle admet sur tout intervalle fini un nombre dénombrable de points de discontinuité *).

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. L'expression

$$f^*(z) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \tag{2.1}$$

s'appelle *intégrale de Laplace*. La fonction $f^*(z)$ s'appelle *transformée* de Laplace ou image de la fonction $f(t)$. La fonction $f(t)$ pour laquelle l'intégrale (2.1) est convergente est dite *transformable-Laplace*. On rappelle que l'intégrale (2.1) est impropre; par définition elle est égale à

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt. \tag{2.2}$$

*) Ces hypothèses ne sont pas restrictives du point de vue physique. Un exposé plus général implique l'emploi de l'intégrale de Lebesgue.

Si la limite du second membre de (2.2) existe, on dit que l'intégrale (2.1) est convergente, dans le cas contraire, elle est divergente.

Etudions à titre d'exemple les transformées de Laplace des fonctions $f(t) = 1$ et $f(t) = e^{at}$. Supposons $z \neq 0$. Il vient

$$\mathscr{L}(1) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-zt}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-zt}}{z}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{z} - \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-zT}}{z}. \qquad (2.3)$$

Pour $\operatorname{Re} z = x > 0$, il vient

$$\lim_{T\to\infty}\left|-\frac{e^{-zT}}{z}\right| = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-xT}}{|z|} = 0,$$

donc, $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{e^{-zT}}{z} = 0$. D'où il suit que la fonction constante $f(t) = 1$ est transformable-Laplace, i.e.

$$\mathscr{L}(1) = \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \qquad (2.4)$$

Pour $\operatorname{Re} z = x \leqslant 0$, l'intégrale de (2.3) est divergente. En effet, en supposant $z \neq 0$, on a

$$\frac{e^{-zT}}{z} = \frac{e^{-xT}}{z}(\cos yT - i\sin yT). \qquad (2.5)$$

Lorsque $T \to \infty$ le premier facteur du second membre (2.5) tend vers l'infini pour $x < 0$ et est égal à un pour $x = 0$; le second facteur ne possède pas de limite si $y \neq 0$ et est égal à l'unité si $y = 0$. Donc, lorsque $z \neq 0$, l'expression (2.5) n'admet pas de limite finie.

Enfin lorsque $z = 0$, i.e. $x = y = 0$, on a

$$\int_0^T e^{-zt}\,dt = \int_0^T dt = T \to \infty.$$

Supposons maintenant que $f(t) = e^{at}$, où a est un nombre réel ou complexe. On a

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-zt}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(z-a)t}\,dt.$$

La dernière intégrale est la transformée de Laplace de la fonction constante $f(t) = 1$ dans le cas où le paramètre complexe z est remplacé par $z - a$ dans (2.3). En vertu de (2.3), on a

$$\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{z-a}\ [\operatorname{Re}(z-a) > 0,\ \text{i.e. } \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a]. \qquad (2.6)$$

2. Propriétés de la transformée de Laplace. Considérons certaines propriétés de la transformée de Laplace.

1. *La transformée de Laplace d'une somme de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est égale à la somme de leurs transformées de Laplace*

$$\mathcal{L}\{f_1+f_2\}=\mathcal{L}\{f_1\}+\mathcal{L}\{f_2\}.$$

2. *La transformée de Laplace d'un produit d'une constante c par une fonction $f(t)$ est égale au produit de cette constante par la transformée de Laplace de $f(t)$:*

$$\mathcal{L}\{cf\}=c\mathcal{L}\{f\}.$$

Ces propriétés découlent immédiatement de la définition de la transformée de Laplace. On sait qu'une opération jouissant de ces propriétés est dite opération *linéaire*. Donc, la transformation de Laplace est une opération linéaire.

Si c_k sont des constantes réelles ou complexes et $f_k(t)$ des fonctions, on obtient l'égalité

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{L}(f_k).$$

Voyons les transformées de Laplace des fonctions $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$ où ω est une constante réelle:

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}(e^{i\omega t})-\mathcal{L}(e^{-i\omega t})\},$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\{\mathcal{L}(e^{i\omega t})-\mathcal{L}(e^{-i\omega t})\}.$$

En vertu de (2.6) et si $a=\pm i\omega$, il vient:

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t})=\frac{1}{z-i\omega}\ (\operatorname{Re} z>0);\qquad \mathcal{L}(e^{-i\omega t})=\frac{1}{z+i\omega},\quad \operatorname{Re} z>0.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos\omega t)&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z-i\omega}+\frac{1}{z+i\omega}\right\}=\frac{z}{z^2+\omega^2},\quad \operatorname{Re} z>0,\\ \mathcal{L}(\sin\omega t)&=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{z-i\omega}-\frac{1}{z+i\omega}\right\}=\frac{\omega}{z^2+\omega^2},\quad \operatorname{Re} z>0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

De façon analogue, on obtiendrait sans peine pour les fonctions hyperboliques les formules suivantes:

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch}\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{z+\omega}\right)=$$
$$=\frac{z}{z^2-\omega^2}\ (\operatorname{Re} z>\omega);$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh}\omega t)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega}-\frac{1}{z+\omega}\right)=$$
$$=\frac{\omega}{z^2-\omega^2}\ (\operatorname{Re} z>\omega).\tag{2.8}$$

3. *Si l'intégrale* (2.1) *est convergente au point* $z = z_0 = x_0 + iy_0$, *elle l'est en tous les points pour lesquels* $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$, *i.e. l'intégrale est convergente dans le domaine* $\operatorname{Re} z > z_0$ *du plan complexe* z.

Ce domaine est un demi-plan situé à droite de la verticale $\operatorname{Re} z = x_0$.

Démonstration. Soit $\varphi(t) = \int_0^t f(u) e^{-z_0 u} du$. La convergence de (2.1) en z_0 entraîne l'existence de $\lim_{t \to \infty} \varphi(t)$. Donc la fonction $|\varphi(t)|$ est bornée pour tous les $t \geqslant 0$. En d'autres termes, il existe un Q tel que $|\varphi(t)| \leqslant Q$ pour tous les $t \geqslant 0$. Intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^\omega f(t) e^{-zt} dt = \int_0^\omega e^{-(z-z_0)t} d\varphi(t) =$$

$$= \varphi(\omega) e^{-(z-z_0)\omega} + (z - z_0) \int_0^\omega \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt. \qquad (2.9)$$

Or $|e^{-(z-z_0)t}| = e^{-(x-x_0)t}$, donc

$$|\varphi(\omega) e^{-(z-z_0)\omega}| \leqslant e^{-(x-x_0)\omega} Q \to 0 \text{ lorsque } \omega \to \infty \text{ et } x - x_0 > 0.$$

Prouvons l'existence de la limite

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt.$$

Il faut montrer que

$$\lim_{\substack{\omega \to \infty \\ \omega_1 \to \infty}} \int_\omega^{\omega_1} \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt = 0. \qquad (2.10)$$

On a

$$\left| \int_\omega^{\omega_1} \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt \right| \leqslant \left| \int_\omega^{\omega_1} |\varphi(t) e^{-(z-z_0)t}| \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant Q \left| \int_\omega^{\omega_1} e^{-(x-x_0)t} dt \right| = Q \left| \frac{e^{-(x-x_0)\omega} - e^{-(x-x_0)\omega_1}}{x - x_0} \right|. \qquad (2.11)$$

Mais pour $x - x_0 > 0$ et $\omega \to \infty$, $\omega_1 \to \infty$, (2.11) entraîne (2.10).

En supposant maintenant que $\omega \to \infty$ dans (2.9) et vu que la limite du second membre de cette égalité existe, il vient

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega f(t)^{-zt} dt = (z - z_0) \int_0^\infty \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt. \qquad (2.12)$$

Donc, l'intégrale (2.1) est convergente pour $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$. ■

Soit E l'ensemble de tous les z réels tels que l'intégrale de Laplace (2.1) soit convergente, $\gamma_c = \inf E$ la borne inférieure de l'ensemble E. Il est évident que γ_c peut être fini ou égale à $-\infty$. Le nombre γ_c s'appelle *abscisse de convergence* de l'intégrale de Laplace. Dans le plan complexe, la droite $\operatorname{Re} z = \gamma_c$ est dite *axe de convergence* de l'intégrale de Laplace (2.1).

La propriété 3 entraîne l'existence des trois cas suivants pour l'intégrale de Laplace:

1) l'abscisse de convergence $\gamma_c = -\infty$: l'intégrale (2.1) est partout convergente.

2) l'abscisse de convergence γ_c est finie: l'intégrale de Laplace (2.1) est convergente sur tout le demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_c$ et divergente sur tout le demi-plan $\operatorname{Re} z < \gamma_c$;

3) l'intégrale (2.1) est partout divergente.

Le demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_c$ est appelé *demi-plan de convergence de l'intégrale de Laplace.*

La fonction $f(t) = e^{t^2}$ est un exemple de fonction dont l'intégrale de Laplace est partout divergente. En effet, soit $z = x$ un nombre réel. On a

$$e^{-zt} f(t) = e^{-xt+t^2} = e^{t(t-x)}.$$

Donc,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-xt+t^2} = \infty$$

et

$$\int_0^\infty e^{-xt+t^2}\, dt = \infty. \tag{2.13}$$

Pour $z = z_0$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-z_0 t + t^2}\, dt$$

est à fortiori divergente, puisque sa convergence entraîne celle de (2.13) pour $x > \operatorname{Re} z_0$.

4. *Si $f^*(z)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, $f^*(z - a)$ est la transformée de Laplace de la fonction $e^{at} f(t)$.*

En effet,

$$\mathcal{L}(e^{at} f) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(z-a)t} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}(z-a) > \gamma_c,$$

i.e.

$$\mathcal{L}(e^{at} f) = f^*(z-a). \quad ■ \tag{2.14}$$

A signaler que le domaine de convergence de l'intégrale $\mathcal{L}(e^{at} f)$ se déduit de celui de $\mathcal{L}(f)$ par le changement de z en $z - a$. Comme

exemple d'application de la formule (2.14) on a la formule (2.6) qui en est une conséquence pour $f(t) = 1$. A l'aide de (2.7) et (2.14) par exemple, on obtient aisément les formules

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{at}\cos\omega t) &= \frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2} \quad (\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a); \\ \mathcal{L}(e^{at}\sin\omega t) &= \frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2} \quad (\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a); \end{aligned} \tag{2.15}$$

Si, outre (2.1), l'intégrale

$$\int_0^\infty |f(t)\,e^{-zt}|\,dt = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega |f(t)\,e^{-zt}|\,dt \tag{2.16}$$

converge, on dit que l'intégrale (2.1) est absolument convergente.

Dans la suite nous étudierons en principe des fonctions dont les transformées de Laplace convergent absolument. En général, on supposera que dans (2.1) le nombre z est complexe ($z = x + iy$). La partie réelle de z sera supposée positive, i.e. $\operatorname{Re} z = x > 0$.

5. *Si l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente en un point* $z = z_0 = x_0 + iy_0$, *elle est uniformément et absolument convergente dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $z = z_0 = x_0 + iy_0$; l'intégrale (2.1) est absolument convergente pour $z = z_0$. Cela signifie qu'existe

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega |f(t)\,e^{-z_0 t}|\,dt = \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-x_0 t}\,dt < \infty. \tag{2.17}$$

Si $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$, i.e. $x \geqslant x_0$, alors

$$\int_0^\infty |f(t)\,e^{-zt}|\,dt = \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-xt}\,dt \leqslant \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-x_0 t}\,dt < \infty.$$

Donc, l'intégrale (2.1) est absolument convergente pour $\operatorname{Re} z \geqslant x_0$.

Prouvons que l'intégrale (2.1) est uniformément convergente dans ce domaine. Pour $\omega < \omega_1$ et $x \geqslant x_0$ on a

$$\left|\int_\omega^{\omega_1} f(t)\,e^{-zt}\,dt\right| \leqslant \int_\omega^{\omega_1} |f(t)|\,e^{-xt} \leqslant \int_\omega^{\omega_1} |f(t)|\,e^{-x_0 t}\,dt.$$

En vertu de la condition (2.17), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $A > 0$ (dépendant seulement de ε) tel que pour tous les $\omega_1 > \omega > A$ l'on ait

$$\int_\omega^{\omega_1} |f(t)|\,e^{-x_0 t}\,dt < \varepsilon.$$

Donc, pour $\omega_1 > \omega > A$ et z quelconques, tels que $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0 = x_0$, l'on a

$$\left| \int_{\omega}^{\omega_1} f(t) e^{-zt} dt \right| < \varepsilon.$$

L'intégrale (2.1) est donc uniformément convergente dans le domaine $\operatorname{Re}(z - z_0) \geqslant 0$. ■

Comme précédemment on pourrait définir l'axe de convergence absolue $\operatorname{Re} z = \gamma_a$ et l'abscisse de convergence γ_a. Si γ_c est fini et γ_a infini, l'intégrale (2.1) est convergente et l'intégrale (2.16) divergente.

6. *Si l'intégrale de Laplace* (2.1) *est convergente au point* z_0 *et* $F(t) = \int_0^t f(u)\, du$, *l'intégrale*

$$\int_0^{\infty} F(t) e^{-zt} dt \tag{2.18}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$ *et, de plus,*

$$\int_0^{\infty} F(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > \gamma_c. \tag{2.19}$$

Démonstration. Soit $\operatorname{Re} z_0 > \gamma_c$. La convergence de (2.1) entraîne que la fonction $\varphi(t) = \int_0^t f(u) e^{-z_0 u} du$ uniformément bornée dans la section $[0, \infty[$, i.e. $|Q(t)| < Q$. On a par ailleurs

$$e^{-zt} F(t) = e^{-zt} \int_0^t e^{z_0 u} d\varphi(u) = e^{-(z-z_0)t} \varphi(t) - z_0 e^{-zt} \int_0^t \varphi(u) e^{z_0 u} du,$$

d'où

$$|e^{-zt} F(t)| \leqslant Q e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t} + |z_0| e^{-\operatorname{Re} zt} \int_0^t Q e^{\operatorname{Re} z_0 u} du =$$

$$= Q e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t} + Q \frac{|z_0|}{\operatorname{Re} z_0} e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t} = Q \left(1 + \frac{|z_0|}{\operatorname{Re} z_0}\right) e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t}.$$

Ainsi

$$|e^{-zt} F(t)| \leqslant Q \left(1 + \frac{|z_0|}{\operatorname{Re} z_0}\right) e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t}. \tag{2.20}$$

L'inégalité (2.20) entraîne la convergence absolue de (2.18) pour $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$. En effet,

$$\int_0^\infty |F(t)\,e^{-zt}|\,dt \leqslant Q\left(1+\frac{|z|}{\operatorname{Re} z_0}\right)\int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t}\,dt =$$
$$= Q\left(1+\frac{|z|}{\operatorname{Re} z_0}\right)\frac{1}{\operatorname{Re}(z-z_0)}.$$

L'inégalité (2.20) et l'égalité

$$\int_0^\omega f(t)\,e^{-zt}\,dt = \int_0^\omega e^{-zt}\,dF(t) = F(\omega)\,e^{-z\omega} + z\int_0^\omega F(t)\,e^{-zt}\,dt$$

entraînent

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}\,dt = z\int_0^\infty F(t)\,e^{-zt}\,dt$$

pour $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$ et $\omega \to \infty$. Comme $z = z_0$ est un point quelconque du demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_c$, la propriété 6 est entièrement démontrée. ■

7. *Si l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente, la fonction* $f^*(z)$ *sera analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > \gamma_a$. *La dérivée* $\frac{df^*(z)}{dz}$ *peut être calculée dans le domaine* $\operatorname{Re} z > \gamma_a$ *par dérivation de* (2.1) *sous le signe d'intégration*

$$\frac{df^*(z)}{dz} = \int_0^\infty f(t)\,(-t)\,e^{-zt}\,dt. \tag{2.21}$$

L'intégrale (2.21) *est absolument convergente dans ce domaine.*

D é m o n s t r a t i o n. Prouvons tout d'abord la convergence absolue de l'intégrale (2.21). Soit $\operatorname{Re} z > \gamma_a$. Prenons le point z_0 tel que $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$ et $\operatorname{Re} z_0 > \gamma_a$. Posons $\operatorname{Re}(z - z_0) = x - x_0 = \delta > 0$. La condition $\operatorname{Re} z_0 > \gamma_a$ entraîne la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-x_0t}\,dt < \infty.$$

Estimons l'intégrale

$$\int_0^\omega |f(t)\,(-t)\,e^{-zt}|\,dt = \int_0^\omega |f(t)|\,te^{-xt}\,dt = \int_0^\omega |f(t)|\,te^{-\delta t - x_0t}\,dt,$$

où, par hypothèse, $\delta = x - x_0 > 0$. La fonction $te^{-\delta t}$ est uniformément bornée pour $t \in [0, \infty]$. Supposons que $\max\limits_{t\in[0,\infty]} |te^{-\delta t}| = Q$, il vient

$$\int_0^\omega |f(t)\,(-t)\,e^{-zt}|\,dt \leqslant Q\int_0^\omega |f(t)|\,e^{-x_0t}\,dt \leqslant Q\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-x_0t}\,dt < \infty.$$

Donc, on a montré que la convergence absolue de l'intégrale (2.1) dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma_a$ entraîne celle de l'intégrale (2.21) dans

le même domaine. De là suit la convergence absolue des intégrales

$$\int_0^\infty f(t)(-t)^n e^{-zt}\,dt\,; \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\ \operatorname{Re} z > \gamma_a. \quad (2.22)$$

On rappelle qu'une fonction $f^*(z)$ d'une variable complexe z est analytique dans un domaine D si en tout point de ce dernier existe la dérivée

$$\frac{df^*(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z},$$

où $z = x + iy$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Soit $\operatorname{Re} z = x > \gamma_a$. Choisissons γ tel que $x > \gamma > \gamma_a$ et examinons les accroissements $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ de l'argument z tels que $x - |\Delta x| \geqslant \gamma$. Majorons la différence

$$\frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z} - \int_0^\infty f(t)(-t)\, e^{-zt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-(z+\Delta z)t} - e^{-zt}}{dz}\,dt - \int_0^\infty f(t)(-t)\, e^{-zt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, \frac{e^{-t\,\Delta z} - 1 + t\,\Delta z}{\Delta z}\,dt.$$

Considérons l'intégrale définie

$$\int_0^1 (1-\zeta)\, e^{-s\zeta}\,d\zeta,$$

où s est un nombre complexe. Une intégration par parties donne

$$s^2 \int_0^1 (1-\zeta)\, e^{-s\zeta}\,d\zeta = e^{-s} - 1 + s,$$

d'où en posant $s = \Delta z t$ il vient

$$\frac{e^{-\Delta z t} - 1 + \Delta z t}{\Delta z} = \Delta z \cdot t^2 \int_0^1 (1-\xi)\, e^{-\Delta z t \xi}\,d\xi.$$

On a donc

$$\frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{dz} - \int_0^\infty f(t)(-t)\, e^{-zt}\,dt =$$

$$= \Delta z \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} t^2\,dt \int_0^1 (1-\xi)\, e^{-\Delta z \cdot t\xi}\,d\xi.$$

Comme $|e^{-zt}| = e^{-xt}$ et $|e^{-\Delta z \cdot t\xi}| = e^{-\Delta x \cdot t\xi}$, on obtient

$$\left| \frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z} - \int_0^\infty f(t)(-t) e^{-zt}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta z| \int_0^\infty |f(t)| e^{-xt} t^2\, dt \int_0^1 (1-\xi) e^{-\Delta x \cdot t\xi}\, d\xi.$$

Or

$$\int_0^1 (1-\xi) e^{-\Delta x t\xi}\, d\xi \leqslant \int_0^1 (1-\xi) e^{|\Delta x| t\xi}\, d\xi \leqslant e^{|\Delta x| t} \int_0^1 (1-\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} e^{|\Delta x| t},$$

donc,

$$\left| \frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z} - \int_0^\infty f(t)(-t) e^{-zt}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} |\Delta z| \int_0^\infty |f(t)| t^2 e^{-(x - |\Delta x|)t}\, dt.$$

Comme $x - |\Delta x| \geqslant \gamma > \gamma_a$, on obtient l'inégalité

$$\left| \frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z} - \int_0^\infty f(t)(-t) e^{-zt}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\Delta z|}{2} \int_0^\infty |f(t)| t^2 e^{-\gamma t}\, dt = \frac{Q\,|\Delta z|}{2}.$$

Le coefficient Q ne dépend pas de Δz. En faisant tendre Δz vers zéro on s'assure de l'existence de la dérivée et de la validité de la formule (2.21). ■

Corollaire. *La propriété* 7 *et la convergence absolue des intégrales* (2.22) *dans le domaine* $\operatorname{Re} z > \gamma_a$ *entraînent*

$$\frac{d^n f^*(z)}{dz^n} = \int_0^\infty f(t)(-t)^n e^{-zt}\, dt. \qquad (2.23)$$

L'exigence de la convergence absolue de l'intégrale (2.1) n'est pas nécessaire pour que la fonction $f^*(z)$ soit analytique. On pourrait démontrer que pour $\gamma_c < \infty$ l'intégrale (2.1) est une fonction analytique de la variable z en tous les points du demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_c$. En effet, la propriété 6 entraîne la convergence absolue de l'intégrale

$$F^*(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z} f^*(z)$$

dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma_c$ où $F(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Donc, $F^*(z)$ est une fonction analytique de z et partant $f^*(z)$ le sera également dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma_c$.

Les formules (2.4) et (2.23) entraînent

$$\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{z^{n+1}} \ (\operatorname{Re} z > 0). \tag{2.24}$$

Les formules (2.6) et (2.24) entraînent

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(z-a)^{n+1}} \ (\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a). \tag{2.25}$$

En faisant $a = \pm i\omega$, ω est un réel, dans la dernière formule et utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}\{t^n \cos \omega t\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{t^n e^{i\omega t}\} + \mathcal{L}\{t^n e^{-i\omega t}\}\right] =$$

$$= \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}}\right] = \frac{n!}{2}\,\frac{(z+i\omega)^{n+1}+(z-i\omega)^{n+1}}{(z^2+\omega^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{(z^2+\omega^2)^{n+1}}\left\{z^{n+1} - \binom{n+1}{2} z^{n-1}\omega^2 + \binom{n+1}{4} z^{n-3}\omega^4 \ldots\right\},$$

$$\operatorname{Re} z > 0. \tag{2.26}$$

De façon analogue, on obtiendrait

$$\mathcal{L}\{t^n \sin \omega t\} = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(t^n e^{i\omega t}) - \mathcal{L}(t^n e^{-i\omega t})\right] =$$

$$= \frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(z-i\omega)^{n+1}} - \frac{1}{(z+i\omega)^{n+1}}\right] = \frac{n!}{2i}\,\frac{(z+i\omega)^{n+1}-(z-i\omega)^{n+1}}{(z^2+\omega^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{n!}{(z^2+\omega^2)^{n+1}}\left\{\binom{n+1}{1} z^n\omega - \binom{n+1}{3} z^{n-2}\omega^3 + \right.$$

$$\left. + \binom{n+1}{5} z^{n-4}\omega^5 - \ldots\right\}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{2.27}$$

Soit α une constante arbitraire telle que $\operatorname{Re} \alpha > -1$ et

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^\alpha\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0). \tag{2.28}$$

Supposons z réel et posons $zt = x$, on obtient

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{x}\frac{x^\alpha}{z^\alpha}\frac{dx}{z} = \frac{1}{z^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}. \tag{2.29}$$

Les fonctions $f^*(z)$ et $\frac{1}{z^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$ sont analytiques dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$. Donc, en vertu du théorème d'unicité (cf. § 1) elles sont confondues sur tout le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, puisqu'elles le sont sur le demi-axe réel positif. On remarquera que la fonction $z^\gamma = e^{\gamma \operatorname{Ln} z}$ de la variable complexe z est multivalente si γ n'est pas égal à un entier. Dans ce cas, lorsqu'on l'étudiera sur le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, on conviendra qu'il s'agit des branches provenant de celles de $\operatorname{Ln} z$ confondues avec $\ln z$ pour les z positifs. On a donc la formule

$$\mathscr{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Re} \alpha > -1. \tag{2.30}$$

En particulier, pour $\alpha = n > 0$, (2.30) entraîne (2.24).

En posant $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}.$$

De (2.14) et (2.30), il résulte

$$\mathscr{L}(t^\alpha e^{at}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z-a)^{\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} a \tag{2.31}$$

et

$$\mathscr{L}(t^\alpha \cos \omega t) = \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}(t^\alpha e^{i\omega t}) + \mathscr{L}(t^\alpha e^{-i\omega t})\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\frac{1}{(z-i\omega)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(z+i\omega)^{\alpha+1}}\right]; \tag{2.32}$$

$$\mathscr{L}(t^\alpha \sin \omega t) = \frac{1}{2i}\left[\mathscr{L}(t^\alpha e^{i\omega t}) - \mathscr{L}(t^\alpha e^{-i\omega t})\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i}\left[\frac{1}{(z-i\omega)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(z+i\omega)^{\alpha+1}}\right]. \tag{2.33}$$

En particulier, en posant $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans les deux dernières formules, on obtient

$$\mathscr{L}\left(\frac{\cos \omega t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\sqrt{z+i\omega} + \sqrt{z-i\omega}}{\sqrt{z^2+\omega^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\sqrt{(\sqrt{z+i\omega}+\sqrt{z-i\omega})^2}}{\sqrt{z^2+\omega^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sqrt{\sqrt{z^2+\omega^2}+z}}{\sqrt{z^2+\omega^2}} \tag{2.34}$$

et, de façon analogue,

$$\mathscr{L}\left(\frac{\sin \omega t}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sqrt{\sqrt{z^2+\omega^2}-z}}{\sqrt{z^2+\omega^2}}. \tag{2.35}$$

8. *Soit* $l > 0$ *et* $z_k = z_0 + kl$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Si l'intégrale* (2.1) *est convergente en* z_0 *et en tous les points* z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *la fonction* $f^*(z_k) = 0$, *alors la fonction* $f(t)$ *est partout nulle sur l'intervalle* $]0, \infty[$, *sauf en ses points de discontinuité.*

Démonstration. Soit $\varphi(t) = \int_0^t f(u) e^{-z_0 u} du$; il est évident que la fonction $\varphi(t)$ est continue dans l'intervalle $]0, \infty[$ et $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. La formule (2.12) entraîne

$$f^*(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = (z - z_0) \int_0^\infty \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt.$$

En posant $z = z_k$, $z_k - z_0 = lk$ et compte tenu de ce que $f^*(z_k) = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \varphi(t) e^{-klt} dt = 0; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.36}$$

Dans la dernière intégrale faisons le changement $e^{-lt} = x$; il vient $t = \frac{1}{l} \ln \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{l} \frac{dx}{x}$. Posons $\varphi\left(\frac{1}{l} \ln \frac{1}{x}\right) = \Psi(x)$. De (2.36) il suit

$$\int_0^1 \Psi(x) x^{k+1} dx = 0; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

La fonction $\Psi(x)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$, donc $\Psi(x) = 0$ pour tous les $x \in [0, 1]$, d'où $\varphi(t) = 0$ pour tous les $t \in [0, \infty[$. Et l'intégrale

$$\int_0^t f(u) e^{-z_0 u} du = 0$$

pour tous les $t \geqslant 0$. Donc si la fonction $f(t)$ est continue au point $t = t_0$, $f(t_0) = 0$. ■

Supposons que les intégrales

$$f_1^*(z) = \int_0^\infty f_1(t) e^{-zt} dt \quad \text{et} \quad f_2^*(z) = \int_0^\infty f_2(t) e^{-zt} dt$$

sont convergentes pour $\operatorname{Re} z > \gamma$ et $f_1^*(z) = f_2^*(z)$ pour $\operatorname{Re} z > \gamma$. Pour tous les $t \geqslant 0$ on a alors

$$\int_0^t f_1(u) du = \int_0^t f_2(u) du. \tag{2.37}$$

Si donc les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont continues en $t = t_0$, on a $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. On supposera que les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont égales si elles prennent les mêmes valeurs en leurs points de continuité communs. L'égalité (2.37) est toujours réalisée pour de telles fonctions. On peut alors dire que si les transformées de Laplace de $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont égales, ces fonctions le sont également, i.e. la transformée de Laplace $f^*(z)$ définit $f(t)$ de façon univoque. La transformation de Laplace est donc une opération linéaire qui fait correspondre le zéro au zéro.

9. *Si les intégrales*

$$f^*(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \quad \text{et} \quad g^*(z) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt \tag{2.38}$$

sont absolument convergentes dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma$, *la fonction* $h^*(z) = f^*(z)\, g^*(z)$ *est la transformée de Laplace de la fonction*

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$$

et l'intégrale

$$h^*(z) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-zt}\, dt$$

est absolument convergente sur le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma$.

Cette proposition porte le nom de théorème de multiplication ou *théorème de Borel.*

Démonstration. La convergence absolue des intégrales (2.38) entraîne celle de l'intégrale double

$$f^*(z)\, g^*(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(\xi+\eta)} f(\xi)\, g(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma$. Faisons le changement de variables $\xi + \eta = t$, $\eta = u$. Le nouveau domaine d'intégration, que l'on notera (B), est: $t \in [0, \infty[$, $[u \in [0, t]$.

On a donc

$$f^*(z)\, g^*(z) = \iint_{(B)} e^{-zt} f(t-u)\, g(u)\, dt\, du.$$

Transformant l'intégrale double en intégrale itérée, on obtient

$$f^*(z)\, g^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du. \quad \blacksquare \tag{2.39}$$

Appliquons le théorème de multiplication pour trouver la fonction $f(t)$ si l'on connaît sa transformée de Laplace

$$f^*(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}.$$

Posons

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = (z+i)^{-1/2}(z-i)^{-1/2}.$$

Supposant que $\alpha = -\frac{1}{2}$, $a = \pm i$ dans (2.31), on trouve

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}e^{-it}\} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{z+i}};$$

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}e^{it}\} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{z-i}}.$$

Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ le théorème de multiplication donne

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

où

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \tau^{-1/2}e^{-i\tau}(t-\tau)^{-1/2}e^{i(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{e^{it}}{\pi}\int_0^t \tau^{-1/2}(t-\tau)^{-1/2}e^{-2i\tau}\,d\tau.$$

Posant $\tau = tu$, il vient:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2u)}[u(1-u)]^{-1/2}\,du.$$

Posons $1-2u = \cos\varphi$. On obtient

$$[u(1-u)]^{-1/2} = \frac{2}{\sin\varphi}, \quad 2\,du = \sin\varphi\,d\varphi$$

et (cf. [34])

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{it\cos\varphi}\,d\varphi = J_0(t),$$

où $J_0(t)$ est une fonction de Bessel.

Donc, est vraie

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

10. *Si une fonction $f(t)$ est dérivable dans l'intervalle $]0, \infty[$ et sa dérivée $f'(t)$ est transformable-Laplace, alors $f(t)$ est également transformable-Laplace et*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = z\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{2.40}$$

D é m o n s t r a t i o n. On sait que

$$f(t) - f(0) = \int_0^t f'(u)\,du;$$

et la propriété 6 entraîne

$$\mathscr{L}\{f(t) - f(0)\} = \frac{1}{z}\mathscr{L}\{f'(t)\},$$

ou

$$\mathscr{L}\{f(t)\} - \frac{1}{z}f(0) = \frac{1}{z}\mathscr{L}\{f'(t)\},$$

d'où résulte la formule (2.40). ■

Citons quelques exemples d'application de la formule (2.40). La formule

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

entraîne

$$\mathscr{L}\{(\cos\omega t)'\} = z\mathscr{L}\{\cos\omega t\} - \cos 0 = \frac{z^2}{z^2+\omega^2} - 1$$

et

$$\mathscr{L}\{(\cos\omega t)'\} = \mathscr{L}\{-\omega\sin\omega t\} = -\omega\mathscr{L}\{\sin\omega t\},$$

d'où

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\} = -\frac{\mathscr{L}\{(\cos\omega t)'\}}{\omega} = -\frac{z^2}{\omega(z^2+\omega^2)} + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}.$$

En appliquant (2.40) à $f'(t)$ on obtient

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = z\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0) = z^2\mathscr{L}\{f(t)\} - zf(0) - f'(0). \tag{2.41}$$

De façon analogue, on obtiendrait

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = z^3\mathscr{L}\{f(t)\} - z^2f(0) - zf'(0) - f''(0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = z^n\mathscr{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}f^{(k)}(0). \tag{2.42}$$

11. *Si l'intégrale* (2.1) *est absolument convergente*

$$\lim_{y\to\pm\infty} f^*(x+iy) = 0, \tag{2.43}$$

et la convergence est uniforme pour tous les $x \geqslant x_1 > \gamma_a \geqslant 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'intégrale est absolument convergente pour $\operatorname{Re} z \geqslant x_1$. Alors pour $x \geqslant x_1$

$$|f^*(x+iy)| \leqslant \left| \int_0^A e^{-zt} f(t)\,dt \right| + \int_A^\infty e^{-x_1 t} |f(t)|\,dt$$

et l'on peut toujours choisir A si grand que $\int_A^\infty e^{-x_1 t} \, |f(t)| \, dt < \frac{\varepsilon}{2}$, où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut, par conséquent, il suffit de montrer la propriété 11 pour la fonction

$$F_1^*(z) = F_1^*(x+iy) = \int_0^A e^{-zt} f(t)\,dt$$

quel que soit A positif fixe.

Si $f(t)$ possède une dérivée absolument intégrable, alors

$$F_1^*(z) = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} f(t) \right]_{t=0}^{t=A} + \frac{1}{z} \int_0^A f'(t)\, e^{-zt}\,dt,$$

d'où, pour $x \geqslant x_1 > 0$,

$$|F_1^*(z)| \leqslant \frac{|f(0)|+|f(A)|}{|z|} + \frac{1}{|z|} \int_0^A |f'(t)|\, e^{-x_1 t}\,dt \leqslant \frac{M}{|y|},$$

où

$$M = |f(0)| + |f(A)| + \int_0^A e^{-x_1 t} |f'(t)|\,dt.$$

Il est évident que le second membre de la dernière inégalité tend uniformément vers zéro en $x \geqslant x_1$ lorsque $|y| \to \infty$. Si $f(t)$ est une fonction quelconque pour laquelle existe l'intégrale $\int_0^A |f(t)|\,dt$, on peut toujours exhiber une fonction $f_\varepsilon(t)$ possédant une dérivée continue et telle que

$$\int_0^A |f(t) - f_\varepsilon(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient alors

$$\left| \int_0^A f(t)\, e^{-zt}\,dt \right| \leqslant \left| \int_0^A [f(t) - f_\varepsilon(t)]\, e^{-zt}\,dt \right| + \left| \int_0^A f_\varepsilon(t)\, e^{-zt}\,dt \right|;$$

or d'après ce qui précède il existe un nombre $N = N(\varepsilon)$ tel que pour $|y| \geqslant N$, on a $\left| \int_0^A f_\varepsilon(t) e^{-zt} dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous les $x \geqslant x_1$. Dans ce cas

$$\left| \int_0^A f(t) e^{-zt} dt \right| \leqslant \int_0^A |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tous les $x \geqslant x_1$. ■

Voyons à titre d'exemple la transformée de Laplace de la fonction

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

de l'argument t qui se rencontre fréquemment en théorie de la chaleur, soit

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} = \int_0^\infty e^{-zt} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) dt.$$

On a la formule

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\xi^2} d\xi =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\xi^2} d\xi.$$

Soit

$$\xi = \frac{x}{2a\sqrt{\tau}}; \quad d\xi = -\frac{x\, d\tau}{4a\tau^{\frac{3}{2}}},$$

on obtient

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \Psi(\tau)\, d\tau,$$

où

$$\Psi(\tau) = e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en vertu de (2.19), il vient

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}=\mathscr{L}\{1\}-\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\mathscr{L}\left\{\int_0^t \Psi(\tau)\,d\tau\right\}=$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{z}\Psi^*(z),$$

où

$$\Psi^*(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\Psi(t)\,dt.$$

Calculons l'intégrale

$$\Psi^*(z)=\int_0^\infty e^{-\left(zt+\frac{x^2}{4a^2t}\right)}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

On a

$$zt+\frac{x^2}{4a^2t}=\left(\sqrt{zt}-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2+\frac{x}{a}\sqrt{z},$$

donc

$$\Psi^*(z)=e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{zt}-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.44}$$

En posant

$$\frac{x}{2a\sqrt{t}}=u; \qquad \frac{x\,dt}{4at^{3/2}}=-du,$$

dans la dernière intégrale, on trouve

$$J=\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{zt}-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}=\frac{4a}{x}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x\sqrt{z}}{2au}-u\right)^2}du. \tag{2.45}$$

Supposons maintenant que

$$\frac{x\sqrt{z}}{2au}=v, \qquad du=-\frac{x\sqrt{z}}{2a}\frac{dv}{v^2}.$$

L'intégrale (2.45) s'écrit alors

$$J=2\int_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{v^2}e^{-\left(\frac{x\sqrt{z}}{2av}-v\right)^2}du. \tag{2.46}$$

L'addition des égalités (2.45) et (2.46) donne

$$J = \frac{2a}{x}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x\sqrt{z}}{2au}-u\right)^2} du + \frac{2a}{x}\frac{x}{2a}\sqrt{z}\int_0^\infty \frac{1}{v^2} e^{-\left(\frac{x\sqrt{z}}{2av}-v\right)^2} dv,$$

ou

$$J = \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{zt}-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{x}\int_0^\infty \left[1+\frac{x\sqrt{z}}{2av^2}\right] e^{-\left(\frac{x\sqrt{z}}{2av}-v\right)^2} dv.$$

En faisant

$$\frac{x\sqrt{z}}{2av} - v = \xi, \qquad d\xi = -\left(1+\frac{x\sqrt{z}}{2av^2}\right) dv$$

dans la dernière intégrale, on trouve finalement

$$J = \frac{2a}{x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{2a}{x}\sqrt{\pi}.$$

De (2.44), (2.45), (2.46) il résulte

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{z}\left(1-e^{-\frac{x}{a}\sqrt{z}}\right). \tag{2.47}$$

On a montré plus haut que le domaine de définition de la transformée de Laplace

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

était toujours le demi-plan de droite $\operatorname{Re} z > \gamma_c$, appelé demi-plan de convergence et que $f^*(z)$ y était analytique. Cette circonstance est primordiale car elle permet d'appliquer à l'étude de la fonction $f^*(z)$ les puissantes méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. La correspondance établie à l'aide de l'intégrale de Laplace entre $f^*(z)$ et $f(t)$ permet de ramener l'étude de la fonction $f(t)$ à celle de $f^*(z)$. Le symbole $\mathcal{L}$, commode lors d'un usage fréquent, doit être compris non comme un symbole de l'intégrale de Laplace, mais essentiellement comme un opérateur appliquant l'ensemble des fonctions d'une variable réelle dans celui des fonctions d'une variable complexe. Pour souligner cette particularité de la transformation de Laplace, la fonction $f(t)$ est souvent appelée *original*, et la fonction $f^*(z)$ *image*.

3. Inversion de l'intégrale de Laplace. L'inversion de l'intégrale de Laplace consiste à trouver $f(t)$ à partir de l'équation intégrale

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = f^*(z),$$

où $f^*(z)$ est une fonction connue. Les fonctions $f(t)$ les plus couramment utilisées et leurs images $f^*(z)$ sont consignées dans des tables spéciales [14], [10], [12], [13] qui en principe suffisent pour résoudre la plupart des problèmes. Dans le cas général on fera appel au théorème d'inversion suivant.

Théorème 1. *Si l'intégrale*

$$f^*(z) = \mathscr{L}(f) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

a pour l'abscisse de convergence $\gamma_c < \infty$, *alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f^*(z) \frac{e^{zt}}{z}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ \int_0^t f(u)\, du & \text{pour } t > 0, \end{cases} \tag{2.48}$$

où $x > \gamma_c$, $x > 0$ *et l'intégrale est prise dans sa valeur principale, i.e.*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} f^*(z) \frac{e^{zt}}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f^*(z) \frac{e^{zt}}{z}\, dz.$$

D é m o n s t r a t i o n. Faisons la démonstration en appliquant la formule intégrale de Fourier

$$\varphi(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega (t-\tau)}{t-\tau} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{2.49}$$

Pour que (2.49) ait lieu il suffit par exemple que $\varphi(\tau)$ soit continue et t, à variation bornée au voisinage de t et absolument intégrable sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$ [30].

Soit l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} \frac{f^*(z)}{z} e^{zt}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{f^*(x+iy)}{x+iy} e^{(x+iy)t} i\, dy =$$

$$= \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{f^*(x+iy)}{x+iy} e^{iyt}\, dy. \tag{2.50}$$

Posons

$$F(t) = \int_0^t f(u)\, du.$$

En vertu de la propriété 6 (formule (2.19)), on a

$$\frac{f^*(z)}{z} = \int_0^\infty F(t) e^{-zt}\, dt, \tag{2.51}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\omega}^{x+i\omega}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=\frac{e^{xt}}{2\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega}e^{iyt}\,dy\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi)\,e^{-\xi(x+iy)}\,d\xi.$$

Intervertissant l'ordre d'intégration sur ξ et y, ce qui est possible puisque l'intégrale (2.51) est absolument convergente (cf. propriété 6), on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\omega}^{x+i\omega}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=\frac{e^{xt}}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}F(\xi)\,e^{-x\xi}\,d\xi\int\limits_{-\omega}^{\omega}e^{i(t-\xi)y}\,dy.$$

Comme $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$ et posant $F(\xi)=0$ pour $\xi<0$, la dernière égalité s'écrit

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\omega}^{x+i\omega}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=\frac{e^{xt}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\,e^{-x\xi}\,\frac{\sin\omega(t-\xi)}{t-\xi}\,d\xi. \qquad (2.52)$$

Etant donné que $F(\xi)\,e^{-x\xi}$ est une fonction dérivable puisque $F(t)$ est représentable par l'intégrale $\int\limits_0^t f(u)\,du$ et qu'existe l'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\xi)\,e^{-x\xi}|\,d\xi$$

par suite de la convergence absolue de (2.51), la fonction $F(\xi)\,e^{-x\xi}$ vérifie les conditions pour lesquelles est valable la formule de Fourier, donc existe la valeur principale de l'intégrale *)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=F(t), \qquad (2.53)$$

d'où il résulte ($F(t)=0$ pour $t\leqslant 0$) que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=\begin{cases}F(t), & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

---

*) En effet, $F(t)=0$ pour $t<0$; d'autre part, $F(t)=\int\limits_0^t f(u)\,du$ et $\int\limits_0^t |f(u)|\,du$ existent pour $t>0$. Donc, $F(t)$ est continue et à variation continue en tout point t.

ou

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{f^*(z)}{z}e^{zt}\,dz=\begin{cases} f(t), & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{2.54}$$

Si l'on suppose que l'on peut dériver sur t sous le signe d'intégration dans (2.54), on obtient pour la fonction $f(t)$ la formule suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}f^*(z)\,e^{zt}\,dz=\begin{cases} f(t), & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{2.55}$$

Cette formule est valable si la fonction $f(\xi)e^{-x\xi}$ vérifie les conditions suffisantes de convergence de l'intégrale de Fourier, par exemple si

$$\int\limits_0^\infty |f(\xi)|\,e^{-x\xi}\,d\xi<\infty$$

et $f(\xi)$ est à variation bornée au voisinage du point $\xi = t$ et continue en ce point. ■

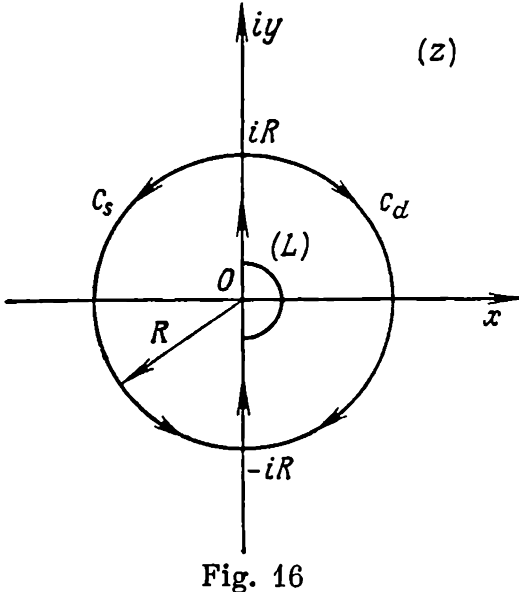


Fig. 16

Les intégrales de contour figurant dans (2.48) et (2.55) se calculent à l'aide des théorèmes énoncés dans le paragraphe précédent.

Exhibons quelques exemples de calcul d'intégrales de contour.

Soit à calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{tz}\,\frac{1-e^{-az}}{z}\,dz=f(t). \tag{2.56}$$

Fractionnons cette intégrale en deux

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{tz}}{z}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{(t-a)z}}{z}\,dz=f_1(t)-f_2(t)=f(t).$$

Ces intégrales étant identiques (t est remplacé par $t - a$ dans la seconde) il suffit de calculer l'une d'elles, par exemple, la première. La fonction à intégrer est analytique en toute partie finie du plan sauf au point $z = 0$ qui est un pôle du premier ordre. Choisissons l'axe imaginaire pour contour d'intégration. Contournons le point $z = 0$ par la droite comme l'indique la fig. 16. Appliquons le théorème de Cauchy aux intégrales

$$\int\limits_{c'_d}\frac{e^{tz}}{z}\,dz\,;\quad \int\limits_{c'_s}\frac{e^{tz}}{z}\,dz, \tag{2.57}$$

où c'_d et c'_s sont composés du segment de l'axe imaginaire d'extrémités $-iR$ et iR, le point z étant contourné par la droite, et demi-cercles c_d et c_s de rayon R, situés respectivement à droite et à gauche de l'axe imaginaire. La première intégrale est nulle puisque à l'intérieur et sur le contour c'_d les fonctions à intégrer ne possèdent pas de points singuliers. Donc, en vertu du lemme de Jordan, on a

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c'_d}\frac{e^{zt}}{z}\,dz=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\,dz=0,\quad t<0. \tag{2.58}$$

Dans la deuxième intégrale, la fonction à intégrer possède un résidu égal à l'unité au point $z = 0$. En appliquant de nouveau le lemme de Jordan, on aura

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c'_s}\frac{e^{zt}}{z}\,dz=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\,dz=2\pi i\ (t>0). \tag{2.59}$$

En groupant les formules (2.58) et (2.59), on obtient

$$f_1(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t<0,\\ 1 \text{ pour } t>0,\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t<a,\\ 1 \text{ pour } t>a\end{cases} \tag{2.60}$$

et

$$f(t)=\begin{cases}0 \text{ pour } t<0,\\ 1 \text{ pour } 0<t<a,\\ 0 \text{ pour } t>a.\end{cases} \tag{2.61}$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{tz}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}\,dz=f(t). \tag{2.62}$$

La fonction à intégrer

$$\varphi(z)=\frac{e^{tz}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}$$

possède deux pôles simples aux points $z_1 = -a + ib$ et $z_2 = -a - ib$ de résidus (formule (1.44)):

$$\operatorname{Res}\varphi(z_1)=\frac{1}{2}\exp\{(-a+ib)\,t\};$$

$$\operatorname{Res}\varphi(z_2)=\frac{1}{2}\exp\{(-a-ib)\,t\}.$$

En étendant l'intégration au contour indiqué sur la fig. 17 et appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient sans

peine

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{c'_d}\frac{e^{zt}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}\,dz=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}\,dz=0,\quad t<0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{c'_s}\frac{e^{zt}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}\,dz=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}(z+a)}{(z+a)^2+b^2}\,dz=2\pi ie^{-at}\cos bt,\quad t>0,$$

où c'_d et c'_s sont des contours fermés constitués du segment L de l'axe imaginaire d'extrémités $-iR$ et iR et des demi-cercles c_d et c_s

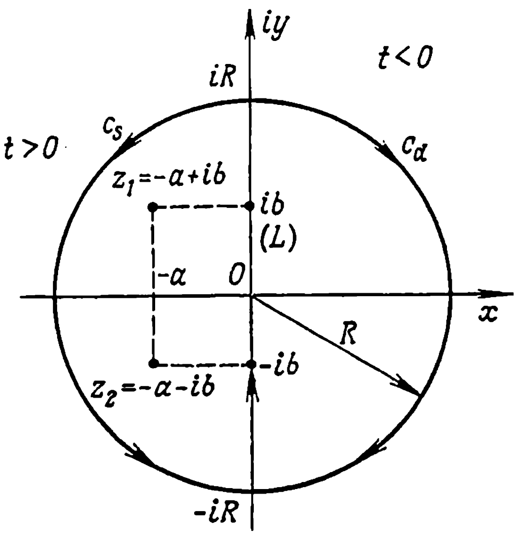


Fig. 17

situés de part et d'autre de l'axe imaginaire et parcourus dans le sens direct.

Donc,

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<0,\\ e^{-at}\cos bt & \text{pour } t>0.\end{cases}\tag{2.63}$$

Calculons encore l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{tz}}{z^{n+1}}\,dz=f(t),\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots\tag{2.64}$$

Pour $a=0,\,1,\,2,\,\ldots$ la fonction à intégrer dans (2.64) est analytique en toute région du plan sauf au point $z=0$ qui est un pôle d'ordre $n+1$. Le résidu de la fonction $\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}$ au point $z=0$ se calcule à l'aide de (1.46) et vaut $\frac{t^n}{n!}$. En étandant l'intégration aux contours c'_d et c'_s on obtient comme précédemment

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,dz=0\ (t<0);\qquad \int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,dz=2\pi i\frac{t^n}{n!}\ (t>0)$$

donc,

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{pour } t<0, \\ \dfrac{t^n}{n!} & \text{pour } t>0. \end{cases} \tag{2.65}$$

4. Représentation de fonctions par l'intégrale de Laplace. Dans la suite nous aurons besoin de critères qui nous indiqueraient si une fonction donnée, analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma$, est une transformée de Laplace.

Théorème 2. *Une fonction analytique au voisinage du point à l'infini et nulle en ce point, est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente.*

Démonstration. Par hypotèse, il existe un nombre R tel que pour $|z|>R$ la fonction est représentable par une série convergente

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}. \tag{2.66}$$

Compte tenu de

$$\frac{1}{z^k}=\int_0^{\infty}\frac{t^{k-1}e^{-zt}}{(k-1)!}\,dt, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

construisons la fonction

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

On a manifestement l'égalité formelle

$$F(z)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-zt}\,dt. \tag{2.68}$$

Démontrons-là. Soit $\frac{1}{z}=\zeta$, $F\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\zeta^k$. La série sera convergente pour $|\zeta|<\frac{1}{R}$. Donc en vertu de l'inégalité de Cauchy relative aux coefficients d'une série entière on a

$$|a_k|<MR_1^k, \text{ où } R_1>R \text{ et } M=\max_{|\zeta|<R_1}\left|F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|.$$

D'où résultent la convergence de la série (2.67), quel que soit t, et la majoration

$$|f(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|\,|t|^{k-1}}{(k-1)!}\leqslant MR_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^{k-1}\,|t|^{k-1}}{(k-1)!}=MR_1e^{R_1|t|}.$$

Donc $f(t)$ est une fonction entière à croissance exponentielle. La convergence uniforme de la série (2.67) pour $\operatorname{Re} z > R_1$ entraîne

$$\int_0^A f(t)\, e^{-zt}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \int_0^A t^{k-1} e^{-zt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \left[\int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt - \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt \right] =$$

$$= \int_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \left[\frac{(k-1)\,!}{z^k} - \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt =$$

$$= F(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt,$$

donc

$$F(z) - \int_0^A f(t)\, e^{-zt}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)\,!} \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-zt}\, dt,$$

d'où

$$\left| F(z) - \int_0^A f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k-1)\,!} \int_A^{\infty} t^{k-1} e^{-\operatorname{Re} z \cdot t}\, dt \qquad (2.69)$$

Le second membre est une série dont chaque terme dépend de la variable A. Cette série est majorée par la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k-1)\,!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-R_1 t}\, dt, \qquad (2.70)$$

i.e. chaque terme de la dernière série est plus grand que le terme correspondant de la série (2.69). Mais la série (2.70) est convergente pour $R_1 > R$. En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k-1)\,!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-R_1 t}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{R_1^k} < \infty.$$

Donc la série (2.69) est uniformément convergente en $A > 0$. Lorsque $A \to \infty$ chaque terme de la série tend vers zéro et pour $\operatorname{Re} z > R_1$ on a

$$\lim_{A \to \infty} \left| F(z) - \int_0^A f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| = 0,$$

ce qui démontre (2.68).

Théorème 3. *Si une fonction $F(z)$ analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ *tend vers zéro lorsque $|z| \to \infty$ uniformément en* $\arg z$ *dans un demi-plan quelconque $\gamma \in [\operatorname{Re} z, \gamma_0[$ et l'intégrale*

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\,dz, \quad \gamma > \gamma_0 \tag{2.71}$$

est absolument convergente, $F(z)$ est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente.

D é m o n s t r a t i o n. Soit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\,e^{zt}\,dz = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma+iy)\,e^{iyt}\,dy, \quad \gamma > \gamma_0. \tag{2.72}$$

La convergence absolue de l'intégrale (2.71) et l'inégalité

$$\left| \int_a^b F(\gamma+iy)\,dy \right| \leqslant \int_a^b |F(\gamma+iy)|\,dy$$

entraînent la convergence uniforme de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma+iy)\,e^{iyt}\,dy$$

en $t \in]-\infty, \infty[-\infty$. Donc, $f(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$.

La fonction $f(t)$ ne dépend pas de γ. En effet, montrons que pour tous les t, on a l'égalité

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(z)\,e^{zt}\,dz = \int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} F(z)\,e^{zt}\,dz, \quad \gamma \in]\gamma_1, \gamma_0[\tag{2.73}$$

La fonction $F(z)\,e^{zt}$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_0$, donc l'intégrale de cette fonction étendue au contour fermé $ABCD$ (fig. 18) est nulle. Et

$$\int_{-\omega}^{\omega} F(\gamma+iy)\,e^{(\gamma+iy)t}i\,dy = \int_{-\omega}^{\omega} F(\gamma_1+iy)\,e^{(\gamma_1+iy)t}i\,dy +$$

$$+ \int_{\gamma}^{\gamma_1} F(x-i\omega)\,e^{(x-i\omega)t}\,dx - \int_{\gamma}^{\gamma_1} F(x+i\omega)\,e^{(x+i\omega)t}\,dx. \tag{2.74}$$

D'après les conditions du théorème, lorsque $\omega \to \infty$, $|F(x \pm i\omega)| \to 0$ uniformément en $x \in [\gamma, \gamma_1]$, donc les deux dernières intégrales tendant vers zéro et l'égalité (2.74) entraîne (2.73). Du lemme de

Jordan il résulte que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Enfin, de (2.72) il vient

$$|f(t)| \leqslant Q e^{\gamma t}, \quad \text{où } Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + iy)| \, dy$$

et γ est un nombre quelconque $> \gamma_0$. Donc, existe l'intégrale

$$F_1(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} \, dt \quad \text{pour } \operatorname{Re} z > \gamma.$$

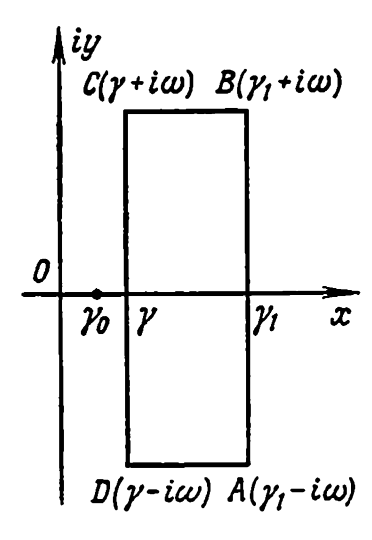


Fig. 18

Pour démontrer le théorème il suffit de prouver maintenant que $F_1(z)$ est confondue avec $F(z)$. Dans $F_1(z)$ remplaçons z par $\zeta = \xi + i\eta$, où $\xi > \gamma$:

$$F_1(\zeta) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A f(t) e^{-\zeta t} \, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-\zeta t} \, dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(z) e^{zt} \, dz.$$

L'intégrale (2.72) est absolument convergente. Donc, dans le second membre de la dernière égalité on peut intervenir l'ordre d'intégration :

$$F_1(\zeta) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(z) \, dz \int_0^A e^{-(\zeta - z)t} \, dt, \quad \operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Re} z.$$

On remarquera que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-(\zeta - z)t} \, dt = \int_0^\infty e^{-(\zeta - z)t} \, dt = \frac{1}{\zeta - z}$$

et la dernière intégrale est uniformément convergente en y pour $\mathrm{Re}\,(\zeta - z) = \xi - \gamma > 0$. En effet,

$$\left|\int_A^\infty e^{-(\zeta-z)t}\,dt\right| \leqslant \int_A^\infty e^{-\mathrm{Re}(\zeta-z)t}dt = \int_A^\infty e^{-(\xi-\gamma)t}\,dt \to 0$$

lorsque $A \to \infty$, et l'on a

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(z)}{\zeta - z}\,dz. \tag{2.75}$$

Considérons maintenant un contour fermé Γ constitué du segment AB de la droite $\mathrm{Re}\,z = \gamma$ et de l'arc c_R du demi-cercle de rayon R interceptant ce segment (fig. 19). Pour R suffisamment grand,

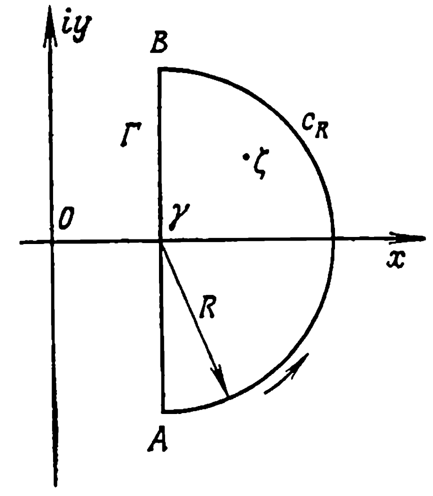


Fig. 19

le point ζ sera compris à l'intérieur de ce contour et en vertu de la formule de Cauchy (cf. (1.20)) on obtient

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \frac{F(z)\,dz}{z-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_R} \frac{F(z)\,dz}{z-\zeta}. \tag{2.76}$$

D'après la condition du théorème il suit que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un R_0 tel que pour tous les $R > R_0$ l'on ait $|F(z)| < \varepsilon$ en tous les points z du demi-cercle c_R, i.e. $z = \gamma + Re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. On obtient alors les inégalités

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_R} \frac{F(z)\,dz}{z-\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{c_R} \frac{|F(z)|\,|dz|}{|z-\zeta|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\,d\varphi}{R - |\zeta-\gamma|} =$$

$$= \frac{\varepsilon R}{2(R - |\zeta - \gamma|)} < \varepsilon,$$

si seulement $R > R_0$ et $R > 2 \mid \zeta - \gamma \mid$. Donc, dans (2.76) l'intégrale étendue à l'arc c_R tend vers zéro lorsque $R \to \infty$, d'où il suit que

$$F(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(z)\, dz}{z - \zeta}$$

lorsque $R \to \infty$. En comparant la dernière égalité à (2.75), on obtient $F(\zeta) = F_1(\zeta)$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > \gamma_0$. ■

Lorsqu'on résout des problèmes par la méthode du calcul opérationnel on a souvent à calculer l'intégrale de contour

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(z)}{z} e^{zt}\, dz = \Phi(t), \tag{2.77}$$

sans avoir étudié préalablement le problème de la représentabilité de la fonction $F(z)$ par une intégrale de Laplace. Il est naturel d'utiliser les renseignements recueillis pendant le calcul de (2.77) pour élucider le problème de la représentabilité de $F(z)$ par une intégrale de Laplace. Le théorème suivant est susceptible d'être très utile.

Théorème 4. *Si une fonction $F(z)$ analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ *vérifie les conditions:*

1) $\lim\limits_{|z| \to \infty} \frac{F(z)}{z} = 0$ *et* $\operatorname{Re} z > \gamma_0$ *et la convergence est uniforme en* $\arg z$ *dans tout demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant \gamma_1 > \gamma_0$;

2) *pour tous les* $t \in]-\infty, \infty[$ *existe*

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{F(z)}{z} e^{zt}\, dz = \Phi(t); \tag{2.78}$$

3) *la fonction $\Phi(t)$ est dérivable dans l'intervalle* $]-\infty, -\infty[$ *et sa dérivée est représentable par l'intégrale de Laplace absolument convergente*

$$F_1(z) = \int_0^\infty \Phi'(t)\, e^{-zt}\, dt, \tag{2.79}$$

alors $F(z) = F_1(z)$ et partant $F(z)$ est représentable par une intégrale de Laplace.

D é m o n s t r a t i o n. La condition 1) entraîne comme dans la démonstration du théorème 3 que $\Phi(t)$ ne dépend pas de γ. La fonction $\frac{F(z)}{z}$ réalise dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant \gamma_1 > \gamma_0$ les conditions du lemme de Jordan, donc $\Phi(t) = 0$ pour tous les $t < 0$ et en vertu de la continuité de $\Phi(t)$ on a $\Phi(0) = 0$. Appliquant le théorème

d'inversion (cf. pt. 3) à l'intégrale (2.79), on obtient

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F_1(z)}{z}e^{zt}\,dz,\quad t\in]-\infty,\ \infty[.$$

Donc, pour tous les $t\in]-\infty,\ \infty[$ et les γ suffisamment grands, on a

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}\frac{F(z)-F_1(z)}{z}e^{zt}\,dz=0,$$

ou

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega}\frac{F(\gamma+iy)-E_1(\gamma+iy)}{\gamma+iy}e^{iyt}\,dy=0.$$

D'où (cf. [30]) il vient

$$\frac{F(\gamma+iy)-F_1(\gamma+iy)}{\gamma+iy}=0,\quad y\in]-\infty,\ \infty[.$$

Donc $F(z) = F_1(z)$. ■

Théorème 5. *Si dans le demi-plan* $\mathrm{Re}\, z>\gamma_0$, $q(z)$ *est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente*

$$q(z)=\int\limits_0^{\infty}h(t)\,e^{-zt}\,dt, \tag{2.80}$$

$H(z)$ *est une fonction analytique au voisinage du point zéro (y compris au point* $z=0$*) et* $H(0)=0$, *alors* $H[q(z)]$ *est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente.*

On démontrera ce théorème dans le cas où $H(t)$ vérifie l'inégalité

$$|h(t)|\leqslant Qe^{\alpha},\quad t\in[0,\ \infty[. \tag{2.81}$$

Démonstration. Par hypothèse, la fonction $H(z)$ est représentable par la série entière

$$H(z)\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k z_k, \tag{2.82}$$

dont le rayon de convergence est $\rho_0>0$. De (2.80) et (2.81) il suit

$$|q(z)|\leqslant Q\int\limits_0^{\infty}e^{-(\gamma-\alpha)t}\,dt\quad \frac{Q}{\gamma-\alpha},\quad \text{où } \gamma\quad \mathrm{Re}\, z>\gamma_0. \tag{2.83}$$

Supposons que $\gamma_1>\gamma_0$ est tel que

$$\frac{Q}{\gamma_1-\alpha}\leqslant\rho<\rho_0.$$

On a alors $|q(z)| \leqslant \rho$ dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant \gamma_1$. D'où suit la convergence uniforme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k [q(z)]^k = H[q(z)]$$

dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma_1$. En effet,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k [q(z)]^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |q(z)|^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \infty.$$

Posons

$$h_1(t) = h(t), \quad h_k(t) \int_0^t h_{k-1}(t-u) h(u) \, du, \quad k = 2, 3 \ldots \tag{2.84}$$

De toute évidence (cf. propriété 9)

$$\int_0^{\infty} h_k(t) e^{-zt} \, dt = [q(z)]^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

De (2.81) il résulte

$$|h_2(t)| \leqslant Q^2 \int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\alpha u} \, du = Q^2 t e^{\alpha t}.$$

Si maintenant l'on pose

$$|h_k(t)| \leqslant \frac{Q^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t}, \tag{2.85}$$

de (2.84) l'on déduit

$$h_{k+1}(t)| \leqslant \frac{Q^{k+1}}{(k-1)!} \int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\alpha u} u^{k-1} \, du = \frac{Q^{k+1} t^k}{k!} e^{\alpha t}.$$

Donc l'inégalité (2.25) est vérifiée pour tous les k entiers.

Montrons maintenant que la série

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(t) \tag{2.86}$$

est uniformément convergente dans tout intervalle $[0, A]$.

La convergence de la série (2.82) pour $z = \rho$ entraîne l'existence d'un nombre M tel que $|a_k \rho^k| \leqslant M$ pour tous les k. Dans ce cas de (2.85) il vient

$$|a_k h_k(t)| \leqslant |a_k| \frac{Q^k t^{k-1} e^{\alpha t}}{(k-1)!} \leqslant M \left(\frac{Q}{\rho}\right)^k e^{\alpha t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{2.87}$$

d'où il résulte que pour $t \in [0, A]$ on a

$$|a_k h_k(t)| \leqslant M \left(\frac{Q}{\rho}\right)^k \frac{e^{\alpha A} A^{k-1}}{(k-1)!};$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k h_k(t)| \leqslant \frac{MQ}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{QA}{\rho}\right)^{k-1} e^{\alpha A}}{(k-1)!} = \frac{MQ}{\rho} e^{\left(\alpha+\frac{Q}{\rho}\right)A}.$$

Ce qui démontre la convergence uniforme de (2.86). L'inégalité (2.87) implique

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{MQ}{\rho} e^{\left(\alpha+\frac{Q}{\rho}\right)t}. \tag{2.88}$$

Posons $\alpha + \frac{Q}{\rho} = \gamma_2$. Il est évident que l'intégrale de Laplace

$$\Phi^*(z) = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-zt}\, dt = \lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\omega} \Phi(t) e^{-zt}\, dt$$

est absolument convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > \gamma_2$. La convergence uniforme de (2.86) entraîne

$$\int_0^{\omega} \Phi(t) e^{-zt}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\omega} h_k(t) e^{-tz}\, dt. \tag{2.89}$$

Montrons que la série du second membre est uniformément convergente en $\omega > 0$. Estimons pour cela la somme

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \int_0^{\omega} h_k(t) e^{-zt}\, dt.$$

Posant $\operatorname{Re} z = \gamma > \gamma_2 = \alpha + \frac{Q}{\rho}$ et tenant compte de (2.85), il vient

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \int_0^{\omega} h_k(t) e^{-zt}\, dt \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \int_0^{\omega} \frac{Q_k t^{k-1} e^{\alpha t} e^{-\gamma t}}{(k-1)!}\, dt,$$

d'où

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \int_0^{\omega} h_k(t) e^{-zt}\, dt \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| Q^k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} e^{-(\gamma-\alpha)t}}{(k-1)!}\, dt =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| Q^k \frac{1}{(\gamma-\alpha)^k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| Q^k \frac{1}{(\gamma_2-\alpha)^k} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| Q^k \frac{\rho^k}{Q^k} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \rho^k < \varepsilon,$$

où ε est un nombre arbitraire donnée à priori si seulement $N > N_0(\varepsilon)$. La dernière conclusion découle de la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \rho^k$. Donc, la série (2.89) est uniformément convergente en ω. Si l'on fait tendre $\omega \to \infty$ on obtient

$$\Phi^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} h_k(t) e^{-zt} dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k [q(z)]^k = H[q(z)]. \quad \blacksquare$$

Par exemple, de (2.30) il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = \frac{1}{z^{\alpha}},$$

où $\operatorname{Re} \alpha > 1$. Cette intégrale est absolument convergente pour $\operatorname{Re} z > 0$ et la fonction $h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ vérifie la condition (2.81) pour $\alpha > 1$. Donc les fonctions

$$\frac{1}{z^{\alpha}} e^{\frac{1}{z^{\alpha}}}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{z^{\alpha}}\right), \quad \frac{1}{1+z^{\alpha}}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{z^{\alpha}}$$

sont représentables par des intégrales de Laplace absolument convergentes.

L'égalité

$$\frac{e^{-\omega z}}{z} = \int_{\omega}^{\infty} e^{-zt} dt, \quad \omega > 0$$

entraîne la représentabilité des fonctions

$$\frac{e^{-\omega z}}{z+e^{-\omega z}}, \quad \frac{e^{-\omega z}}{z-e^{-\omega z}}, \quad \frac{\sqrt{z+e^{-\omega z}}}{\sqrt{z}} - 1$$

par une intégrale de Laplace.

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS THÉORIQUES DU CALCUL OPÉRATIONNEL

§ 3. Notions et propositions fondamentales

Pour formuler exactement l'objet du calcul opérationnel rappelons les définitions fondamentales rattachées à la notion de relation fonctionnelle, d'espace vectoriel, d'opérateur linéaire et d'anneau.

La notion de relation fonctionnelle est fondamentale en analyse mathématique. Dans le plus simple des cas, elle se présente comme suit. Soient X et Y deux ensembles de nombres réels. Si à tout point $x \in X$ une loi fait correspondre un nombre $y \in Y$, on dit qu'est définie une fonction $y = f(x)$ sur l'ensemble X. L'ensemble X s'appelle *domaine de définition*, l'ensemble Y *domaine de valeurs* de la fonction $f(x)$.

Donc, la question se pose de savoir si le fait que les ensembles X et Y sont des ensembles de nombres réels est essentiel pour la notion de dépendance fonctionnelle. Il est évident que non. Si l'on considère que X et Y sont des ensembles quelconques d'éléments, on est conduit à la notion de dépendance fonctionnelle générale dont les exemples ne manquent pas dans les domaines les plus divers de la science. Par exemple, la position du centre de gravité d'un projectile en fonction du temps est donnée par la relation $\bar{r} = r(t)$ qui est une fonction vectorielle. Ici le domaine de définition de la fonction vectorielle appartient à l'ensemble des réels, et le domaine des valeurs est l'ensemble des vecteurs dans l'espace. Un autre exemple de dépendance fonctionnelle est l'intégrale définie $J(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Ici le domaine de définition est constitué de toutes les fonctions intégrables sur $[a, b]$, le domaine de valeurs est une partie de l'ensemble des réels. L'intégrale indéfinie

$$y(x) = \int_a^x b(u)\,du, \quad x \in [a, b]$$

est un exemple de dépendance fonctionnelle où les domaines de définition et de valeurs sont composés de fonctions, i.e. les éléments des

ensembles X et Y sont des fonctions définies sur $[a, b]$ et assujetties à des conditions supplémentaires. Donnons maintenant la définition exacte d'une dépendance fonctionnelle. Soient donnés deux ensembles arbitraires X et Y et une loi associant à tout $x \in X$ un élément bien défini $y \in Y$. On dit qu'est défini un opérateur appliquant X dans Y. Désignons cet opérateur par A. L'application se note alors brièvement

$$y = Ax, \quad x \in X.$$

Cette égalité signifie que l'élément $x \in X$ est associé à $y \in Y$ par l'application A. L'élément $y = Ax$ est l'*image* de l'élément x, l'élément x l'antécédent de $y = Ax \in Y$. Si l'ensemble de toutes les images couvre l'ensemble Y tout entier, on dit que l'opérateur A applique X sur Y. L'application de X sur Y est *bijective* si tout élément $y \in Y$ a un antécédent x et un seul. L'ensemble X est un *espace vectoriel* s'il contient la somme de deux quelconques de ses éléments x_1 et x_2 et le produit d'un élément quelconque $x \in X$ par un nombre $\lambda \in X$. Ces opérations possèdent les propriétés suivantes:

1) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ (*associativité*).
2) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ (*commutativité*)
3) $\left.\begin{array}{l}(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x \\ \lambda\,(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2\end{array}\right\}$ (*distributivité*)
4) $(\lambda\mu)\, x = \lambda\,(\mu x)$ (*associativité*).
5) $1x = x$.

6. *Il existe dans* X *un élément neutre* 0 *tel que quel que soit* $x \in X$ *l'on ait* $0 + x = x$.

L'élément 0 est le zéro de l'ensemble x. Les propriétés 1) à 6) entraînent:

a) $x + 0 = x$ pour tous les $x \in X$;

b) à tout $x \in X$ correspond un seul élément $x' = (-1)\, x$ tel que $x + x' = 0$. Cet élément est noté $-x$ de sorte que $-(\lambda x) = \lambda\,(-x)$;

c) quels que soient $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ il existe un seul élément x tel que $x + x_2 = x_1$. L'élément x est appelé *différence* de x_1 et x_2 et se note $x_1 - x_2$. La condition $x_1 = x_2$ équivaut à $x_1 - x_2 = 0$;

d) $\lambda\,(x_1 - x_2) = \lambda x_1 - \lambda x_2$;

e) $\lambda 0 = 0$.

L'ensemble défini est un *espace vectoriel* sur le corps des complexes si les nombres λ, μ, . . . sont complexes. Comme exemple d'espaces vectoriels citons l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$, la somme et le produit par un nombre étant compris au sens ordinaire.

Deux ensembles X et Y sont *isomorphes* si entre leurs éléments on peut établir une correspondance conservant la somme et le produit par un nombre. Ce qui veut dire que si aux éléments $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$

sont associés les éléments $y_1 \in Y$ et $y_2 \in Y$, à l'élément $x_1 + x_2$ est associé l'élément $y_1 + y_2$ et à l'élément λx_1 l'élément λy_1. Les zéros se correspondent dans l'isomorphisme. Deux ensembles peuvent être isomorphes même s'ils sont constitués d'éléments de nature différente. Cependant toutes les relations établies entre les éléments de l'un au moyen de l'addition et de la multiplication par un nombre sont valables pour l'autre.

Un opérateur A défini sur un ensemble X est *linéaire* si pour deux éléments quelconques $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ et deux nombres quelconques λ_1 et λ_2 est réalisée l'égalité

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2.$$

Soit donné sur un ensemble X deux opérateurs linéaires A_1 et A_2 appliquant cet ensemble X dans un ensemble Y. On appelle *somme des opérateurs* A_1 *et* A_2 l'opérateur A associant à un élément $x \in X$ l'élément y défini par $y = A_1 x + A_2 x$. La somme des opérateurs est notée $A_1 + A_2 = A$. Il est aisé de vérifier que cette somme est un opérateur linéaire.

Soient X, Y, Z des ensembles. L'opérateur A applique X dans Y, l'opérateur B, Y dans Z. On appelle *produit* de A et B l'opérateur C qui associe à $x \in X$ l'élément $z \in Z$ confondu avec l'image de l'élément $Ax \in Y$ par l'application de Y dans Z. Donc, $z = B(Ax)$. Le produit des opérateurs est noté $BA = C$. Le produit d'opérateurs linéaires est un opérateur linéaire. La somme et le produit de trois opérateurs ou plus sont associatifs, i.e.

$$A + B + C = (A + B) + C, \quad CBA = C(BA), \text{ etc.}$$

Le produit de l'opérateur A par un nombre λ est noté λA. Il se définit comme suit. L'opérateur λA associe à $x \in X$ l'élément $\lambda(Ax) \in Y$. L'opérateur qui applique X sur X de telle sorte que chaque image soit confondue avec son antécédent est dit *opérateur unité* et l'application correspondante application *identique* ou identité. L'opérateur unité est noté E, donc $Ex = x$ pour tout $x \in X$. De toute évidence, $EA = AE = A$.

Supposons que l'opérateur A applique l'ensemble X sur l'ensemble Y. On dit que l'opérateur A est *inversible* si quel que soit $y \in Y$ l'équation $Ax = y$ admet une solution unique. A tout $y \in Y$ on peut associer la solution de cette équation. L'operateur réalisant cette correspondance est l'*inverse* de l'opérateur A et se note A^{-1}. Il est évident que $A^{-1}A = E$. On démontre que l'opérateur A^{-1} inverse de l'opérateur linéaire A est également linéaire. Supposons que le domaine de valeurs de l'opérateur linéaire A appartient à un ensemble X, domaine de définition de A, i.e. l'ensemble $Y \subset X$. Dans ce cas, outre l'opérateur A, on peut considérer les puissances de l'opérateur A : $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, . . ., $A^n = AA^{n-1}$ et l'opérateur $A^0 = E$. En vertu de la définition du produit d'opérateurs, on a

$$A^2 x = A(Ax), \quad A^3 x = A(A^2 x), \quad \ldots, A^n x = A(A^{n-1} x).$$

On peut multiplier chacun de ces opérateurs par un nombre. On obtient la suite

$$\alpha_0 E, \quad \alpha_1 A, \quad \alpha_2 A^2, \ldots, \quad \alpha_n A^n,$$

où α_k sont des nombres. Enfin, en faisant la somme de ces opérateurs, on obtient l'opérateur $B = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$. Le domaine de définition de B est l'ensemble X, le domaine des valeurs une partie de X. Si l'on désigne par $P(\lambda)$ le polynôme $\sum_{k=0}^{x} \alpha_k \lambda^k = P(\lambda)$, où λ est une variable réelle ou complexe, il est naturel de noter l'opérateur $B = P(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$. En envisageant un autre polynôme $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \lambda^k$ on peut construire l'opérateur $Q(A) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k A^k$.

Désignons par $\mathfrak{P}(A)$ l'ensemble des opérateurs ainsi construits. Il est évident que $\mathfrak{P}(A)$ est un espace vectoriel pour la somme et le produit par un nombre.

Voyons une autre notion. Un ensemble vectoriel X est un *anneau commutatif* s'il est muni, en plus de la somme, de l'opération de multiplication. Plus exactement, à chaque couple d'éléments $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$, cette opération associe le produit $x_1 x_2 = x \in X$. Le produit possède les propriétés suivantes:

7) $x_1 x_2 = x_2 x_1$ (*commutativité*).

8) $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ (*associativité*).

9) $x_1 (x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$ (*distributivité relativement à la somme*).

10) $\lambda x_1 x_2 = x_1 \lambda x_2$.

Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ de tous les opérateurs de la forme $P(A)$, où $P(\lambda)$ est un polynôme, en plus de la somme on peut considérer le produit des opérateurs $P(A)\,Q(A) = C(A)$, où $C(\lambda)$ est un polynôme, produit de $P(\lambda)$ par $Q(\lambda)$. Il est aisé de voir que l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ est doué d'une structure d'anneau commutatif. On dit que l'anneau $\mathfrak{P}(A)$ est engendré par l'opérateur A.

Un sous-ensemble $X_1 \subset X$ est un *sous-anneau* de X si le produit des éléments de X par un nombre, leur somme et leur produit appartiennent à X. On dit qu'un anneau X_2 est une extension de l'anneau X si X est un sous-anneau de X_2.

Exemple : l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ continues sur $[a, b]$, la somme et le produit étant pris dans leur sens ordinaire. Notons cet anneau C. L'ensemble de tous les polynômes $P(t)$, $t \in [a, b]$, forme un sous-anneau de C.

Un anneau X est par définition un *anneau unitaire* s'il contient un élément e vérifiant la condition $ex = x$ pour tous $x \in X$. L'élément e s'appelle *unité de l'anneau.* L'anneau ne peut posséder plus

d'une unité. Les éléments $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ sont dits *diviseurs de zéro* si leur produit $x_1 x_2 = 0$.

On dit qu'un élément x d'un anneau commutatif unitaire possède un inverse si existe dans X un élément x' tel que $x'x = e$. L'élément x' s'appelle *inverse de* x et se note x^{-1}. Si chaque élément non nul possède un inverse, on dit d'un tel anneau qu'il est un *corps*.

Arrêtons-nous sur l'isomorphisme des anneaux. Les anneaux X et Y sont *isomorphes* si existe une correspondance biunivoque associant à des éléments quelconques x_1 et x_2 de X des éléments y_1 et y_2 de Y, à la somme $x_1 + x_2$ la somme $y_1 + y_2$, au produit $x_1 x_2$ le produit $y_1 y_2$, et, enfin, au produit λx (λ étant un nombre) le produit λy. L'application de X sur Y possédant les propriétes énumérées s'appelle *isomorphisme*. A signaler que les zéros et les unités des anneaux se correspondent respectivement par cet isomorphisme. Deux anneaux isomorphes sont considérés comme ne présentant pas de distinction fondamentale.

En calcul opérationnel on étudie des anneaux de fonctions $f(t)$ définies sur $[0, \infty[$, munis de la somme et du produit ordinaires par des nombres réels ou complexes. Le produit défini sur cet anneau de fonctions est différent du produit ordinaire de fonctions. Nous n'envisagerons que des anneaux commutatifs unitaires d'intégrité, i.e. sans diviseurs de zéro ; nous noterons N un tel anneau.

Théorème 1. *Tout anneau commutatif N peut être étendu à un corps.*

Ce théorème joue un rôle assez important dans l'élaboration du calcul opérationnel.

D é m o n s t r a t i o n. Soit un couple (f, g), où f et $g \in N$ et $g \neq 0$. Deux couples (f, g) et (f_1, g_1) sont *équivalents* si

$$fg_1 = f_1 g. \tag{3.1}$$

Dans ce cas seulement on écrira $(f, g) \sim (f_1, g_1)$. Il est évident que $(f, g) \sim (f, g)$. Si $(f, g) \sim (f_1, g_1)$, alors $(f_1, g_1) \sim (f, g)$. Enfin, si $(f, g) \sim (f_1, g_1)$ et $(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2)$, alors $(f, g) \sim (f_2, g_2)$. En effet, l'équivalence implique $fg_1 = f_1 g$ et $f_1 g_2 = f_2 g_1$, d'où

$$fg_1 g_2 = f_1 g g_2, \quad f_1 g_2 g = f_2 g_1 g.$$

On aura

$$fg_1 g_2 = f_2 g_1 g \quad \text{ou} \quad (fg_2 - f_2 g)\, g_1 = 0,$$

or $g_1 \neq 0$, donc $fg_2 - f_2 g = 0$.

La notion d'équivalence introduite partage l'ensemble de couples (f, g) en classes. Chaque classe est composée de couples équivalents. Comme tous les couples équivalents à (f, g) appartiennent par définition à une même classe, celle-ci est déterminée par un de ses éléments, en l'occurrence (f, g). Cet élément s'appelle *représentant* de la classe. Désignons par $\frac{f}{g}$ la classe contenant le couple (f, g). Cette définition implique $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$, si et seulement si $fg_1 = f_1 g$. Définis-

sons la somme et le produit comme suit

$$\frac{f}{g}+\frac{f_1}{g_1}=\frac{fg_1+f_1g}{gg_1}\ ; \qquad (3.2)$$

$$\frac{f}{g}\cdot\frac{f_1}{g_1}=\frac{ff_1}{gg_1}. \qquad (3.3)$$

Ces définitions sont correctes puisque $gg_1 \neq 0$ et les seconds membres de (3.2) et (3.3) ne dépendent pas du choix des représentants $\frac{f}{g}$ et $\frac{f_1}{g_1}$. En effet, si au lieu des représentants (f, g) et (f_1, g_1) on prend par exemple $(\bar{f}, \bar{g})$ et $(\bar{f}_1, \bar{g}_1)$, les conditions $f\bar{g} = \bar{f}g$ et $f_1\bar{g}_1 = \bar{f}_1 g_1$ entraînent

$$(fg_1+f_1g)(\bar{g}\bar{g}_1)=(\bar{f}\bar{g}_1+\bar{f}_1\bar{g})(gg_1)$$

et

$$(ff_1)(\bar{g}\bar{g}_1)=(\bar{f}\bar{f}_1)(gg_1).$$

La deuxième égalité est évidente. Pour vérifier la première il suffit de la mettre sous la forme (cf. propriétés 1) à 10))

$$(f\bar{g}-\bar{f}g)(g_1\bar{g}_1)=(\bar{f}_1g_1-f_1\bar{g}_1)(g\bar{g}).$$

Désormais il est aisé de vérifier que l'ensemble de tous les symboles $\frac{f}{g}$ forment un anneau commutatif relativement à la somme et au produit. Désignons cet anneau par $\mathfrak{N}$. Ses éléments seront appelés opérateurs. Souvent on désignera les opérateurs par une lettre, par exemple $a = \frac{l}{g}$, $b = \frac{h}{l}$, etc. A la place de l'opérateur $\frac{f}{f}$ on écrira e et on l'appellera *opérateur unitaire.* A la place de l'opérateur $\frac{0}{g}$ on écrira 0 et on l'appellera *opérateur nul.*

Les nombres appartiennent à l'anneau N. On pourra donc considérer le produit d'un nombre λ par une fonction $f(t)$ soit comme un produit ordinaire, soit comme un produit d'éléments de l'anneau. Dans la suite, nous n'étudierons que des anneaux dans lesquels ces deux produits sont confondus. Dans ce cas on a $1\cdot f = f$.

Donc l'unité e de l'anneau N est confondue avec 1, et par conséquent, l'opérateur unitaire e de l'anneau $\mathfrak{N}$ est égal à $\frac{1}{1}$. Si λ et μ sont des nombres, l'opérateur $\frac{\lambda}{\mu}$ peut être identifié à la fraction ordinaire $\frac{\lambda}{\mu}$. En effet, ces opérateurs sont additionnés et multipliés par une constante comme une fraction ordinaire.

Dans l'anneau N, l'équation $fx = g$ n'admet pas toujours une solution. Dans l'anneau $\mathfrak{N}$ toute équation $ax = b$, où $a \neq 0$ admet toujours la solution $x = a^{-1}b$. En effet, si $a \neq 0$ et $a = \frac{f}{g}$, il existe un opérateur inverse $a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{g}{f}$. Donc, $\mathfrak{N}$ est un corps.

Les opérateurs de la forme $\frac{f}{1}$ constituent un sous-anneau dans le corps $\mathfrak{N}$. En effet,

$$\frac{f}{1}+\frac{g}{1}=\frac{f+g}{1} \quad \text{et} \quad \frac{f}{1}\cdot\frac{g}{1}=\frac{fg}{1}.$$

Ce sous-anneau est isomorphe à l'anneau N. Associons à tout élément $f \in N$ un opérateur dont le représentant est le couple $(f, 1)$, i.e. l'opérateur $\frac{f}{1}$. Cette correspondance associe à des éléments distincts de N des opérateurs distincts. En effet, si $f - g \neq 0$, les couples $(f, 1)$ et $(g, 1)$ ne seront pas équivalents. Cette correspondance est une bijection qui associe à la somme et au produit d'éléments de N respectivement une somme et un produit d'opérateurs. Donc, les éléments f sont confondus à l'isomorphisme près avec les opérateurs $\frac{f}{1}$, c'est pourquoi on écrira simplement f au lieu de $\frac{f}{1}$ et, en particulier, $\frac{1}{1} = 1$.

L'anneau N est contenu dans le corps $\mathfrak{N}$, i.e. $\mathfrak{N}$ est une extension de l'anneau N. Le corps $\mathfrak{N}$ s'appelle *corps de quotients.* On a démontré que tout anneau commutatif d'intégrité peut être étendu à un corps de quotients. ■

Citons des exemples simples de corps de quotients. Considérons l'anneau de tous les entiers, la somme, la différence, le produit ayant leur sens ordinaire. En vertu du théorème démontré, cet anneau est susceptible d'être étendu à un corps de quotients dont les éléments seront les fractions $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers. On obtient ainsi le corps des nombres rationnels.

Autre exemple. Soit l'anneau de tous les polynômes $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. L'extension de cet anneau est un corps constitué de toutes les fractions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

En calcul opérationnel on étudie les anneaux d'opérateurs engendrés par l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$. On étudie également les diverses extensions de ces anneaux. A cet effet, on utilise l'isomorphisme qui permet de remplacer les anneaux initiaux par des anneaux dont la structure se prête mieux à l'étude. On a noté plus haut qu'en calcul opérationnel on considérait des fonctions $f(t)$ définies sur la section $[0, \infty[$. Pour rendre cette théorie plus complète il aurait été plus naturel d'envisager une classe de fonctions sommables sur tout intervalle fini $[0, a]$, ce qui aurait impliqué l'introduction de l'intégrale de Lebesgue. Cependant à des fins pratiques on peut fort bien se contenter de fonctions plus simples et avoir affaire à l'intégrale ordinaire de Riemann.

Désignons par L l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)$ définies sur $[0, \infty[$, à valeurs réelles ou complexes et satisfaisant aux deux conditions suivantes:

1) les fonctions $f(t)$ possèdent un ensemble de mesure nulle de points de discontinuité sur tout intervalle fini;

2) l'intégrale $\int_0^a |f(t)|\,dt$ est finie quel que soit $a > 0$. Dans la suite, on développera la théorie uniquement sur des fonctions de L. Le lecteur familier avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue pourra s'en servir. Dans ce cas L désignera la classe de toutes les fonctions sommables sur un intervalle quelconque $[0, a]$. De toute évidence, L est un espace vectoriel. Deux fonctions de L sont *égales* si elles prennent la même valeur en tout point de continuité commun. Pour que des fonctions $f(t) \in L$ et $g(t) \in L$ soient égales il est nécessaire et suffisant que

$$\int_0^t f(u)\,du = \int_0^t g(u)\,du \quad \text{pour tous les } t > 0. \tag{3.4}$$

L'élément nul de L sera une fonction $\Theta(t)$ telle que $\int_0^t \Theta(u)\,du = 0$ pour tous les $t > 0$. On dira qu'une fonction $f(t) \in L$ est nulle si $\int_0^t f(u)\,du = 0$ pour tous les $t > 0$. Dans ce cas cette fonction sera partout nulle sauf en ses points de discontinuité. Si l'on considère des fonctions sommables-Lebesgue, l'élément nul sera toute fonction $f(t)$ presque partout nulle.

Introduisons l'opérateur d'intégration

$$\frac{1}{p} f(t) = \int_0^t f(u)\,du, \tag{3.5}$$

où $f(t) \in L$. L'opérateur d'intégration est désigné par $\frac{1}{p}$. Dans la suite nous verrons que cette notation n'est pas fortuite, mais qu'elle revêt une signification profonde. L'opérateur $\frac{1}{p}$ est défini sur l'ensemble L. Son domaine de valeurs est une partie de L. On peut donc considérer ses puissances. Il est évident que

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 f(t) = \int_0^t du \int_0^u f(v)\,dv = \int_0^t (t-v) f(v)\,dv.$$

L'expression $\left(\frac{1}{p}\right)^n f(t) = \frac{1}{p^n} f(t)$ signifie une n-uple intégration.

Du cours d'analyse on sait que

$$\frac{1}{p^n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-v)^{n-1} f(v)\, dv.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{p^n} f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-v)^n}{n!} f(v)\, dv. \tag{3.6}$$

On voit que pour calculer le résultat de l'application de l'opérateur $\frac{1}{p^n}$ à toute fonction $f(t) \in L$ il faut prendre la dérivée de l'intégrale

$$\int_0^t \frac{(t-v)^n}{n!} f(v)\, dv.$$

Cette intégrale s'appelle *produit de convolution* des fonctions $\frac{t^n}{n!}$ et $f(t)$. Il est évident que l'opérateur $\frac{1}{p^n}$ est entièrement défini par la fonction $\frac{t^n}{n!}$. On peut donc associer à l'opérateur $\frac{1}{p^n}$ la fonction $\frac{t^n}{n!}$ et établir par là même une application des opérateurs $\frac{1}{p^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dans l'ensemble L. Cette application est parfois notée $\frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{t^n}{n!}$. Nous utiliserons simplement le signe d'égalité

$$\frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!}. \tag{3.7}$$

On montrera dans la suite (cf. § 5) que cette forme d'écriture est justifiée.

On remarquera que la formule (3.7) peut être envisagée comme un cas particulier de (3.6) pour $f(t) = 1$, $t \in [0, \infty[$. Etendons-nous sur la correspondance (3.7). L'image du produit $\lambda \cdot \frac{1}{p^n}$ est la fonction $\frac{\lambda t^n}{n!}$, celle de la somme des opérateurs $\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^n}$, la somme des fonctions $\frac{t^m}{m!} + \frac{t^n}{n!}$, c'est-à-dire qu'on a

$$\lambda \frac{1}{p^n} = \frac{\lambda t^n}{n!}; \quad \frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^n} = \frac{t^m}{m!} + \frac{t^n}{n!}. \tag{3.8}$$

Voyons le produit des opérateurs $\frac{1}{p^m}$ et $\frac{1}{p^n}$. D'une part, on a (cf. (3.7))

$$\frac{1}{p^{m+n}} = \frac{t^{m+n}}{(m+n)!}. \tag{3.9}$$

De l'autre, les égalités $\frac{1}{p^m} = \frac{t^m}{m!}$ et $\frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!}$ et la formule (3.6) entraînent pour toute fonction $f(t) \in L$

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{p^n} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-v)^m}{m!}\, dv \cdot \frac{d}{dv}\int_0^v \frac{(v-u)^n}{n!} f(u)\, du,$$

ou

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{p^n} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-v)^m}{m!}\, dv \int_0^v \frac{(v-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du.$$

Intervertissant l'ordre d'intégration dans le second membre de la dernière égalité, on obtient

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{p^n} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\, du \int_u^t \frac{(t-v)^m (v-u)^{n-1}}{m!\,(n-1)!}\, dv. \tag{3.10}$$

En faisant le changement de variables $v-u=\xi$ dans l'intégrale sur v, on obtient

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{p^n} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\, du \int_0^{t-u} \frac{(t-u-\xi)^m \xi^{n-1}}{m!\,(n-1)!}\, d\xi. \tag{3.11}$$

En appliquant cette formule on exprime aisément l'image du produit des opérateurs $\frac{1}{p^m}$ et $\frac{1}{p^n}$ en fonction de $\frac{t^m}{m!}$ et $\frac{t^n}{n!}$. En effet, étant donné que

$$\int_0^t \frac{(t-\xi)^m \xi^{n-1}}{m!\,(n-1)!}\, d\xi = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{n-1} \xi^m}{(n-1)!\, m!}\, d\xi = \frac{t^{m+n}}{(m+n)!},$$

et, eu égard à (3.11), il vient

$$\frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{p^n} f(t)\right) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-u)^{m+n}}{(m+n)!} f(u)\, du.$$

Donc, l'image du produit des opérateurs $\frac{1}{p^m}$ et $\frac{1}{p^n}$ est $\frac{t^{m+n}}{(m+n)!}$, i.e. (cf. (3.9))

$$\frac{1}{p^m} \cdot \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^{m+n}}. \tag{3.12}$$

En vertu de (3.12), on a

$$\frac{1}{p^m}\,\frac{1}{p^n}=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\xi)^m\,\xi^n}{m\,!\,n\,!}\,d\xi. \tag{3.13}$$

Au premier membre on a un produit d'opérateurs, au second la dérivée du produit de convolution des fonctions $\frac{t^m}{m\,!}$ et $\frac{t^n}{n\,!}$, images des opérateurs $\frac{1}{p^m}$ et $\frac{1}{p^n}$. L'expression

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\xi)^m\,\xi^n}{m\,!\,n\,!}\,d\xi$$

peut être envisagée comme le produit (généralisé) des fonctions $\frac{t^m}{m\,!}$ et $\frac{t^n}{n\,!}$. Pour le distinguer du produit ordinaire de fonctions on le notera $\ast$.

Donc, par définition,

$$\frac{t^m}{m\,!}\ast\frac{t^n}{n\,!}=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\xi)^m\,\xi^n}{m\,!\,n\,!}\,d\xi. \tag{3.14}$$

Il est clair que dans (3.14) on peut remplacer les fonctions $\frac{t^m}{m\,!}$ et $\frac{t^n}{n\,!}$ par les dérivées des fonctions $F(t)$ et $G(t)$ si seulement le second membre de (3.14) a un sens, i.e.

$$F(t)\ast G(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-\xi)\,G(\xi)\,d\xi. \tag{3.15}$$

On rappelle que l'objet du calcul opérationnel est de construire et d'étudier les propriétés d'anneaux d'opérateurs dépendant de l'opérateur de dérivation. A partir de l'opérateur d'intégration on peut construire un anneau simple de même nature. Soit, en effet, l'ensemble de tous les opérateurs de la forme $P\left(\frac{1}{p}\right)=$ $=\sum_k \frac{a_k}{p^k}$, où $P(z)=\sum_k a_k z^k$ est un polynôme. On a vu que cet ensemble était un anneau commutatif noté $\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ engendré par l'opérateur $\frac{1}{p}$. A tout opérateur $P\left(\frac{1}{p}\right)\in\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ on peut associer le polynôme $Q(t)=\sum_k \frac{a_k t^k}{k\,!}=\sum_k \frac{a_k}{p^k}$, i.e.

$$P\left(\frac{1}{p}\right)=Q(t). \tag{3.16}$$

En particulier, lorsque $P\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^n}$, l'égalité (3.16) est confondue avec (3.7).

Notons $\mathfrak{P}[t]$ l'ensemble de tous les polynômes d'une variable réelle $t \in [0, \infty]$. Il est évident que c'est un espace vectoriel pour la somme et le produit par un nombre ordinaires. Si maintenant l'on munit $\mathfrak{P}[t)$ du produit en vertu de la formule (3.15), i.e. si l'on définit le produit des polynômes $P(t)$ et $Q(t)$ comme suit

$$R(t)=P(t) \ast Q(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t P(t-\xi)\, Q(\xi)\, d\xi, \qquad (3.17)$$

l'ensemble $\mathfrak{P}[t]$ sera un anneau.

Pour le prouver il faut s'assurer que le produit (3.17) vérifie les conditions 7) à 10). Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet car dans les paragraphes suivants ces propriétés seront développées pour une classe plus large que celle des polynômes. Remarquons seulement que s'agissant des polynômes il suffit de vérifier ces conditions pour les fonctions puissance t^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ce qui est aisé eu égard à la formule

$$t^m \ast t^n=\frac{m!\, n!}{(m+n)!}\, t^{m+n}, \qquad (3.18)$$

qui découle des égalités (3.9) et (3.12). Les propriétés (3.8), (3.9) et (3.13) et la bijectivité de (3.16) entraînent que l'anneau d'opérateurs $\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ et l'anneau des polynômes $\mathfrak{P}[t]$ sont isomorphes. L'anneau $\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ contient relativement peu d'opérateurs. Par exemple, il ne contient pas d'opérateurs de la forme $\frac{1}{(p-\lambda)^k}$, ni l'opérateur de dérivation. Il faut donc l'élargir. Cette extension se réalise le plus facilement par l'isomorphisme des anneaux $\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ et $\mathfrak{P}[t]$. Il est aisé d'étendre $\mathfrak{P}[t]$; il suffit pour cela de remplacer les polynômes par une classe plus large de fonctions. Ce qui est possible puisque l'existence du second membre de (3.17) n'implique pas forcément que $P(t)$ et $Q(t)$ soient des polynômes. Une fois l'extension de l'anneau $\mathfrak{P}[t]$ réalisée, i.e. une fois construit un anneau $\mathfrak{P}$ dont $\mathfrak{P}[t]$ est un sous-anneau, il faut représenter la fonction $f(t) \in \mathfrak{N}$ par l'intermédiaire de l'opérateur $\frac{1}{p}$. Dans ce cas il est nécessaire de généraliser l'égalité (3.16) à une classe de fonctions plus large que celle des polynômes. Pour cela on peut se servir de l'intégrale définie (2.30)

$$\int_0^\infty t^k e^{-zt}\, dt=\frac{k}{z^{k+1}}, \qquad (3.19)$$

où $z = x - iy$ est une variable complexe et $x > 0$. De (3.19) il vient

$$z \int_0^\infty \left(\sum_k \frac{a_k t^k}{k!} \right) e^{-zt}\, dt = \sum_k \frac{a_k}{z^k},$$

ou

$$z \int_0^\infty Q(t)\, e^{-zt}\, dt = P\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.20}$$

A l'aide de la formule (3.20) on peut trouver le polynôme $P(z)$ correspondant à $Q(t) \in \mathfrak{P}[t]$ et choisir dans l'anneau $\mathfrak{P}\left[\frac{1}{p}\right]$ l'opérateur $P\left(\frac{1}{p}\right)$ associé à $Q(t)$. Si l'on remplace formellement z par p dans (3.20), on obtient

$$p \int_0^\infty Q(t)\, e^{-pt}\, dt = P\left(\frac{1}{p}\right), \tag{3.21}$$

qui peut être considérée comme une inversion de l'application (3.16). En remplaçant le polynôme $Q(t)$ par $f(t)$ dans (3.20) et (3.21), on peut généraliser la définition de l'opérateur $P\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_k \frac{a_k}{p^k}$ à une classe de fonctions plus large que celle des polynômes. Ces considérations seront dévéloppées dans le détail dans les paragraphes suivants.

§ 4. Produit de convolution de fonctions

1. Définition du produit de convolution de fonctions et ses propriétés. *On appelle produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, $t \in [0, \infty[$, l'expression*

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du. \tag{4.1}$$

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont continues sur l'intervalle $[0, \infty[$, la fonction $\varphi(t) = f(t-u)\, g(u)$ le sera également sur l'intervalle $[0, t]$. Donc, l'intégrale (4.1) existe. Il est aisé de démontrer que la fonction $h(t)$ sera également continue.

Penchons-nous sur quelques exemples de produits de convolution.

Soit $f(t) = t^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, $g(t) = t^\beta$, $\beta \geqslant 0$. Il vient $h(t) = \int_0^t (t-u)^\alpha u^\beta du$. Posant $u = t\xi$, $du = t\,d\xi$, on obtient

$$h(t) = t^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (1-\xi)^\alpha \xi^\beta\, d\xi.$$

Or de la théorie des intégrales eulériennes on sait

$$\int_0^1 (1-\xi)^\alpha \xi^\beta d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad (4.2)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $\alpha > 0$ est la *fonction gamma*. Donc

$$h(t) = \int_0^t (t-u)^\alpha u^\beta du = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}. \quad (4.3)$$

On remarquera que la formule (4.3) est valable pour α et β négatifs si seulement $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

Supposons maintenant que $f(t) = e^{\alpha t}$, $g(t) = e^{\beta t}$. On a

$$h(t) = \int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\beta u} du = e^{\alpha t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)u} du,$$

d'où

$$\int_0^t e^{\alpha(t-u)} e^{\beta u} du = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}.$$

Le produit de convolution (4.1) ne s'applique pas uniquement aux fonctions continues. On démontre que le produit de convolution de deux fonctions de L (voir définition de L dans le § 3) appartient également à L et

$$\int_0^a |h(t)| dt \leqslant \int_0^a |f(t)| dt \int_0^a |g(t)| dt. \quad (4.4)$$

Posons $f(t) = g(t) = t^{-\frac{3}{4}}$. Il est évident que ces fonctions sont discontinues au point $t = 0$. Leur produit de convolution est

$$\int_0^t (t-u)^{-\frac{3}{4}} u^{-\frac{3}{4}} du = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et présente une discontinuité au point $t = 0$.

Soit

$$\eta(t, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \lambda[\\ 1 & \text{si } \lambda \leqslant t \end{cases}$$

une famille de fonctions dépendant d'un paramètre λ. Il est évident que $\lambda \in [0, \infty[$. Le graphe de la fonction $\eta = \eta(t; \lambda)$ est représenté sur la fig. 20. Si $\lambda = 0$ on a $\eta(t; 0) = \eta(t) = 1$ pour tous les $t \geqslant 0$. Calculons le produit de convolution des fonctions $\eta(t; \lambda)$

et $\eta(t;\ \mu)$. On a

$$h(t)=\int_0^t \eta(t-u;\ \lambda)\,\eta(u;\ \mu)\,du.$$

Comme $\eta(u;\ \mu)=0$ pour $u<\mu$ et $\eta(u;\ \mu)=1$ pour $u\geqslant\mu$ on a $h(t)=0$ lorsque $t<\mu$. Pour $t\geqslant\mu$ on a $h(t)=\int_\mu^t \eta(t-u;\ \lambda)\times$

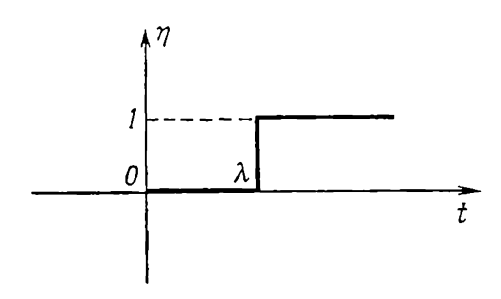


Fig. 20

$\times\, du$. En posant $t-u=\xi$, $du=-d\xi$, on obtient $h(t)=$ $=\int_0^{t-\mu}\eta(\xi;\ \lambda)\,d\xi$ pour $t>\mu$. En reprenant les raisonnements précédents on déduit que $h(t)=0$ lorsque $t-\mu<\lambda$. Pour $t-\mu\geqslant$ $\geqslant\lambda$ il vient $h(t)=\int_\lambda^{t-\mu} d\xi$ et le produit de convolution cherché s'écrit

$$h(t)=\int_0^t \eta(t-u;\ \lambda)\,\eta(u;\ \mu)\,du=\begin{cases}0 & \text{pour}\quad t<\lambda+\mu,\\ t-\lambda-\mu & \text{pour}\quad \lambda+\mu\leqslant t,\end{cases}$$

ou encore

$$\int_0^t \eta(t-u;\ \lambda)\,\eta(u;\ \mu)\,du=\int_0^t \eta(u;\ \lambda+\mu)\,du. \tag{4.5}$$

Propriétés fondamentales du produit de convolution

1. *Le produit de convolution est commutatif*:

$$\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du=\int_0^t g(t-u)\,f(u)\,du.$$

Faisons le changement de variable $t - u = \xi$ dans la première intégrale. On a $du = -d\xi$ et

$$\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = -\int_t^0 f(\xi)\, g(t-\xi)\, d\xi = \int_0^t g(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi.$$

2. *Le produit de convolution est associatif*:

$$\int_0^t \left[\int_0^{t-u} f(t-u-v)\, g(v)\, dv \right] h(u)\, du = \int_0^t f(t-u)\, du \int_0^u g(u-v)\, h(v)\, dv.$$

Rappelons une formule de la théorie des intégrales multiples. Si $f(x, y)$ est une fonction arbitraire intégrable sur le triangle T

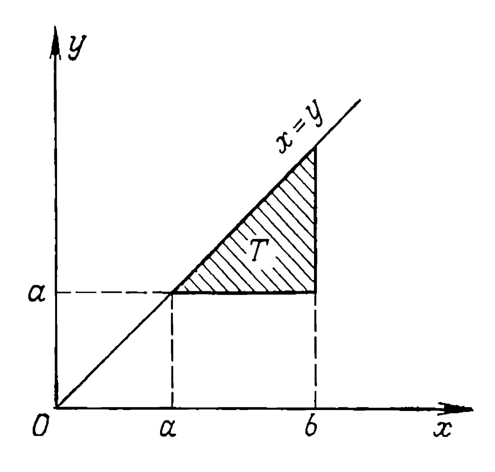


Fig. 21

(fig. 21) limité par les droites

$$y = a, \quad x = b \text{ et } y = x,$$

on a l'égalité

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\, dx, \tag{4.6}$$

appelée souvent *formule de Dirichlet* pour intégrales doubles. Pour démontrer cette formule il suffit de remarquer que les deux intégrales itérées de (4.6) sont égales à l'intégrale double $\iint\limits_T f(x, y)\, dx\, dy$ étendue au triangle T. Le lecteur pourra s'en assurer sans peine en appliquant la formule de réduction d'une intégrale double à une intégrale itérée.

Revenons maintenant à la démonstration de la propriété 2. Soit l'intégrale

$$\int_0^{t-u} f(t-u-v)\, g(v)\, dv.$$

Faisons le changement de variables $v=w-u$, $dv=dw$. On a

$$\int_0^{t-u} f(t-u-v)\, g(v)\, dv = \int_u^t f(t-w)\, g(w-u)\, dw,$$

donc,

$$\int_0^t \left[\int_0^{t-u} f(t-u-v)\, g(v)\, dv\right] h(u)\, du = \int_0^t h(u)\, du \int_u^t f(t-w)\, g(w-u)\, dw.$$

Si l'on applique la formule de Dirichlet (4.6) en y faisant $a=0$, $b=t$, $y=u$, $x=w$, on obtient

$$\int_0^t \left[\int_0^{t-u} f(t-u-v)\, g(v)\, dv\right] h(u)\, du = \int_0^t f(t-w)\, dw \int_0^w g(w-u)\, h(u)\, du.$$

3. *Le produit de convolution est distributif relativement à l'addition*

$$\int_0^t [f(t-u)+g(t-u)]\, h(u)\, du = \int_0^t f(t-u)\, h(u)\, du + \int_0^t g(t-u)\, h(u)\, du.$$

4. *Multiplication du produit de convolution par un nombre:*

$$\int_0^t \lambda f(t-u)\, g(u)\, du = \lambda \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du \quad (\lambda \text{ est un nombre}).$$

5. *Si* $f(t)$ *et* $g(t) \in L$ *et leur produit de convolution* $\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$ *est nul pour tous les* $t \geqslant 0$, *l'intégrale de l'une au moins de ces fonctions prise entre* 0 *et* t *est partout nulle dans la section* $[0, \infty[$.

Les remarques faites au § 3 sur l'élément nul de l'ensemble nous permettent de conclure brièvement: si le produit de convolution de deux fonctions est nul, l'une au moins de ces fonctions est nulle. La propriété 5 s'appelle souvent théorème de Titchmarch du nom de son auteur qui l'a démontré dans le cas général où la fonction n'est assujettie à aucune condition subsidiaire. La démonstration de ce theorème sera donnée au point 2. Maintenant nous allons prouver la propriété 5 pour le cas particulier où l'intégrale de Laplace des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est absolument convergente.

Soit $\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = 0$ pour tous les $t \geqslant 0$. Par hypothèse, il existe un γ tel que les intégrales de Laplace

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \quad \text{et} \quad G(z) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt$$

sont absolument convergentes dans le domaine $\operatorname{Re} z > \gamma$. En vertu de la propriété 9, § 2, le produit $F(z)\, G(z)$ est la transformée de Laplace de la fonction $\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$ qui est nulle pour tous les $t \geqslant 0$, donc, $F(e)\, G(z) = 0$ dans $\operatorname{Re} z > \gamma$. Les fonctions $F(z)$ et $G(z)$ sont analytiques dans $\operatorname{Re} z > \gamma$, donc si $G(z)$ n'est pas identiquement nulle, il existe un point z_0 tel que $\operatorname{Re} z_0 > \gamma$ et $G(z_0) \neq 0$. Alors dans un voisinage suffisamment petit de z_0, la fonction $G(z)$ n'est pas nulle et la fonction $F(z)$ y est partout nulle et comme elle est analytique, $F(z) = 0$ pour tous les z tel que $\operatorname{Re} z > \gamma$. La propriété 8, § 2, nous permet de conclure que $f(t) = 0$ en chaque point de la section $[0, \infty[$, où $f(t)$ est continue. En particulier, si $f(t)$ est continue sur $[0, \infty[$, alors $f(t) = 0$ pour tous les $t \geqslant 0$.

2. Théorème de Titchmarch. Enonçons le théorème de convolution démontré par Titchmarch en 1926 [2].

Théorème 1. *Si des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont continues sur la section $[0, \infty[$ et leur produit de convolution*

$$\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = 0 \tag{4.7}$$

pour tous les $t \geqslant 0$, alors l'une au moins de ces fonctions est partout nulle sur $[0, \infty[$.

R e m a r q u e. La continuité des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ dans la section $[0, \infty[$ n'est pas essentielle. En effet,

$$f_1(t) = \int_0^t f(u)\, du, \quad g_1(t) = \int_0^t g(u)\, du.$$

Intégrant (4.7), on obtient

$$\int_0^t d\xi \int_0^\xi f(\xi - u)\, g(u)\, du = C.$$

Or le premier membre est nul pour $t = 0$, donc

$$\int_0^t d\xi \int_0^\xi f(\xi - u)\, g(u)\, du = 0.$$

D'où, compte tenu de (4.6), il vient

$$\int_0^t g(u)\,du \int_u^t f(\xi - u)\,d\xi = 0\,;$$

posant $\xi - u = \eta$, $d\xi = d\eta$, on aura

$$\int_0^t f(\xi - u)\,d\xi = \int_0^{t-u} f(\eta)\,d\eta = f_1(t-u).$$

Donc,

$$\int_0^t f_1(t-u)\,g(u)\,du = 0,$$

ou

$$\int_0^t g(t-u)\,f_1(u)\,du = 0.$$

Intégrant une fois de plus la dernière égalité, on obtient

$$\int_0^t f_1(t-u)\,g_1(u)\,du = 0, \quad t \in [0, \infty[. \tag{4.8}$$

Si le théorème vaut pour les fonctions continues, il le sera immédiatement pour les fonctions de L et en général pour les fonctions sommables-Lebesgue.

Pour démontrer le théorème de Titchmarch, on aura besoin de quelques propositions supplémentaires.

Si une suite de fonctions $f_n(x)$ est uniformément convergente pour $x \in [a, b]$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Mais la convergence sur $[a, b]$ n'est qu'une condition suffisante de permutation de l'ordre d'intégration et de passage à la limite. Si $f_n(x)$ sont des fonctions continues et la fonction $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ est discontinue, la convergence sera à priori non uniforme et le problème du passage à la limite sous le signe d'intégration implique une étude supplémentaire.

Lemme 1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ *et*

1) *la fonction* $f(x)$ *possède un nombre fini de points de discontinuité*;

2) *existe un nombre* Q *tel que pour tous les* $x \in [a, b]$ *et* $n = 1, 2, \ldots$

$$|f_n(x)| < Q\,;$$

3) *la suite* $f_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ *uniformément sur l'intervalle* $[a, b]$ *sauf en des voisinages aussi petits que l'on peut des points de discontinuité de la fonction limite* $f(x)$, *alors on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de démontrer ce lemme pour le cas particulier où la fonction $f(x)$ ne possède qu'un seul point de discontinuité sur $[a, b]$. Dans le cas général on fractionnera l'intervalle d'intégration en un nombre fini d'intervalles contenant chacun un seul point de discontinuité de la fonction $f(x)$. Ainsi supposons que $f(x)$ présente une discontinuité en $x = t$. Pour fixer les idées convenons que $t \in]a, b[$. Les cas $t = a$ ou $t = b$ se traitent de façon analogue. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque assez petit et $\delta = \frac{\varepsilon}{8Q}$. Prenons pour voisinage du point t l'intervalle $]t - \delta, t + \delta[$. On a

$$\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{t-\delta} f_n(x)\,dx-\int_a^{t-\delta} f(x)\,dx+\int_{t+\delta}^b f_n(x)\,dx-$$
$$-\int_{t+\delta}^b f(x)\,dx+\int_{t-\delta}^{t+\delta} f_n(x)\,dx-\int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\,dx.$$

Par hypothèse, $|f(x)|\leqslant Q$, donc

$$\left|\int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\,dx\right|\leqslant 2\delta Q \quad \text{et} \quad \left|\int_{t-\delta}^{t+\delta} f_n(x)\,dx\right|\leqslant 2\delta Q.$$

Par hypothèse, la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ dans $[a, t-\delta]$ et $[t+\delta, b]$. La convergence uniforme entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{t-\delta} f_n(x)\,dx=\int_a^{t-\delta} f(x)\,dx;\quad \lim_{n\to\infty}\int_{t+\delta}^{b} f_n(x)\,dx=\int_{t+\delta}^{\delta} f(x)\,dx.$$

Donc, existe un n_0 tel que

$$\left|\int_a^{t-\delta} f_n(x)\,dx-\int_a^{t-\delta} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad \left|\int_{t+\delta}^{b} f_n(x)\,dx-\int_{t+\delta}^{b} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

pour tous les $n\geqslant n_0$. Pour $n\geqslant n_0$, on a l'inégalité

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+2\delta Q+2\delta Q=\frac{\varepsilon}{2}+4\delta Q.$$

Posant $\delta=\frac{\varepsilon}{8Q}$, on obtient finalement

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx-\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon \text{ pour tous les } n\geqslant n_0. \quad \blacksquare$$

Lemme 2. *Si une fonction $f(t)$ est continue sur $[0, T]$, alors existe la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^T e^{-kn(t-u)}f(u)\,du=\int\limits_0^t f(u)\,du \qquad (4.10)$$

pout tout $t\in[0, T[$.

Démonstration. Soit $t\in[0, T[$ et $Q=\max\limits_{t\in[0,\,T[}|f(t)|$. Considérons la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}e^{-nk(t-u)}f(u). \qquad (4.11)$$

Figeons un nombre $n>0$ et t. Le terme général de la série de fonctions vérifie l'inégalité

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}e^{-nk(t-u)}f(u)\right|\leqslant\frac{Qe^{nkT}}{k!}.$$

Or la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^{nkT}}{k!}$ est convergente et ses termes ne dépendent pas de la variable u, donc, la série (4.11) est uniformément convergente dans le domaine $u\in[0, T]$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^T e^{-nk(t-n)}f(u)\,du=\int\limits_0^T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}e^{-nk(t-u)}\right)f(u)\,du.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}e^{-nk(t-u)}=e^{-e^{-n(t-u)}}.$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^T e^{-nk(t-u)}f(u)\,du=\int\limits_0^T e^{-e^{-n(t-u)}}f(u)\,du.$$

Compte tenu de l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}e^{-e^{-n(t-u)}}=\begin{cases}1 & \text{pour } u<t\\ e^{-1} & \text{pour } u=t\\ 0 & \text{pour } u>t\end{cases}$$

on aura pour la suite $f_n(u)=e^{-e^{-n(t-u)}}f(u)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u)=f(u) \quad \text{si} \quad u\in[0,\ t[$$

et

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u)=0 \qquad \text{si} \quad u>t.$$

Démontrons maintenant que la suite $f_n(u)$ vérifie toutes les conditions du lemme 1. En effet, comme $0\leqslant e^{-e^{-n(t-u)}}\leqslant 1$, on a

$$|f_n(u)|\leqslant Q, \quad u\in[0,\ T]$$

Soit $\varphi_n(u)=e^{-e^{-n(t-u)}}$. Il est évident que

$$\varphi_n'(u)=-ne^{-e^{-n(t-u)}}<0.$$

Donc, la fonction $\varphi_n(u)$ est décroissante. Si $\delta>0$ est suffisamment petit et $u\in[0,\ t-\delta]$, alors $1-\varphi_n(u)\leqslant 1-\varphi_n(t-\delta)$. Si $u\in[t+\delta,\ T]$, alors $\varphi_n(u)\leqslant\varphi_n(i+\delta)$. D'où il résulte

$$|f(u)-f_n(u)|\leqslant Q(1-\varphi_n(t-\delta)) \text{ pour } u\in[0,\ t-\delta],$$

$$|f_n(u)|\leqslant Q\varphi_n(t+\delta) \text{ pour } u\in[t+\delta,\ T].$$

Ces inégalités entraînent la convergence uniforme de la suite $f_n(u)$ sur les intervalles $[0,\ t-\delta]$ et $[t+\delta,\ T]$. Donc, la troisième condition du lemme 1 est remplie et l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^T e^{-nk(t-u)}f(u)\,du=\int_0^T\lim_{n\to\infty}e^{-e^{-n(s-u)}}f(u)\,du=$$

$$=\int_0^t f(u)\,du, \quad \blacksquare$$

Lemme 3. *Si une fonction $f(t)$ est continue sur l'intervalle* $[0,\ T]$ *et existe un nombre Q tel que*

$$\left|\int_0^T e^{nt}f(t)\,dt\right|\leqslant Q \text{ pour tous les } n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (4.12)$$

alors $f(t)=0$ sur l'intervalle $[0,\ T]$.

Démonstration. Le lemme 2 donne

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-nkt}}{k!}\int_0^T e^{nku}f(u)\,du=\int_0^t f(u)\,du. \qquad (4.13)$$

D'un autre côté, la condition (4.12) entraîne

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-nkt}}{k!}\int_0^T e^{nku}f(u)\,du\right|\leqslant Q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-nkt}}{k!}=Q(e^{e^{-nt}}-1)\to 0$$

lorsque $n \to \infty$. De (4.13) on déduit lorsque $n \to \infty$

$$\int_0^T f(u)\,du = \int_0^t f(u)\,du, \quad t \in [0, T[,$$

d'où $\int_0^t f(u)\,du = 0$ pour tous les $t \in [0, T]$; donc,

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \in [0, T]. \quad \blacksquare$$

Lemme 4. *Si une fonction* $f(t)$ *est continue sur l'intervalle* $[0, T]$ *et*

$$\int_0^T t^n f(t)\,dt = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

alors $f(t) = 0$ *sur l'intervalle* $[0, T]$ *tout entier.*

Démonstration. Posons $t = \alpha x$; on aura

$$\alpha^{n+1} \int_0^{T/\alpha} x^n f(\alpha x)\,dx = 0.$$

Supposons que $\alpha > 0$ est si petit que $\frac{T}{\alpha} > 1$. On a alors

$$\int_1^{\frac{T}{\alpha}} x^n f(\alpha x)\,dx = -\int_0^1 x^n f(\alpha x)\,dx,$$

ou encore

$$\left| \int_1^{\frac{T}{\alpha}} x^n f(\alpha x)\,dx \right| \leqslant \int_0^1 |f(\alpha x)|\,dx = Q.$$

Posant $x = e^{\xi}$, $dx = e^{\xi}\,d\xi$, on a

$$\left| \int_0^{\ln \frac{T}{\alpha}} e^{n\xi} f(\alpha e^{\xi})\, e^{\xi}\,d\xi \right| \leqslant Q \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Le lemme 3 permet de conclure que $f(\alpha e^{\xi}) = 0$ pour tous les $\xi \in \in \left[0, \ln \frac{T}{\alpha}\right]$ ou $f(t) = 0$ pour $t \in T\,[\alpha, T]$. La fonction $f(t)$ étant continue sur $[0, T]$ et $\alpha > 0$ un nombre arbitraire suffisamment petit, $f(t) = 0$ sur $[0, T]$. $\blacksquare$

Lemme 5. *Si une fonction* $h(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$, *alors*

$$\int_0^T h(t)\, e^{-zt}\, dt =$$

$$= \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt \int_0^T g(t)\, e^{-zt}\, dt - e^{-Tz} \int_0^T e^{-zt}\, dt \int_t^T f(t+T-\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Démonstration. On a

$$H_T(z) = \int_0^T h(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^T dt \int_0^t e^{-z(t-u)-zu} f(t-u)\, g(u)\, du.$$

Faisons le changement de variables $t-u=x$, $u=y$ dans l'intégrale double. Il vient $0 < x+y < T$, $y > 0$, $x > 0$. Le nouveau

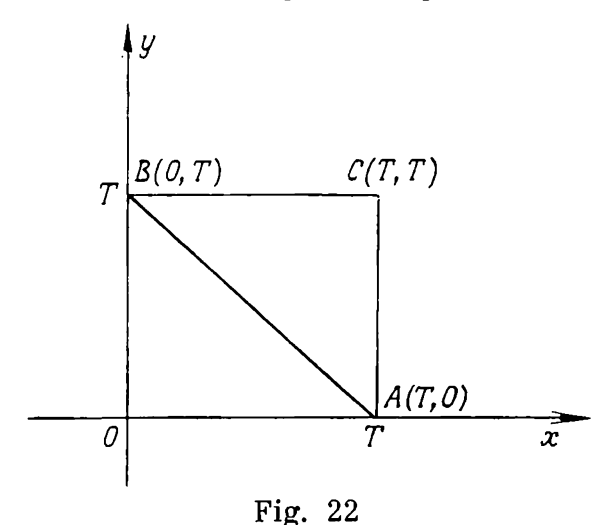


Fig. 22

domaine d'intégration sera donc le triangle ABO (fig. 22) et

$$H_T(z) = \int_0^T e^{-zx} f(x)\, dx \int_0^{T-x} g(y)\, e^{-zy}\, dy = F_T(z)\, G_T(z) - \int_0^T e^{-zx} f(x) \times$$

$$\times\, dx \int_{T-x}^T g(y)\, e^{-zy}\, dy,$$

où

$$F_T(z) = \int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt \quad \text{et} \quad G_T(z) = \int_0^T g(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

et le domaine d'intégration sera le triangle ABC (fig. 22). Effectuons le changement de variables $x+y=v$, $y=\xi$ dans la dernière

intégrale double. Il vient $0 < v - \xi < T$, $v > T$, $\xi < T$ et le nouveau domaine d'intégration sera le triangle PQR (fig. 23) et l'on aura

$$H_T(z) = F_T(z)\, G_T(z) - \int_T^{2T} e^{-zv}\, dv \int_{v-T}^{T} f(v-\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

En posant enfin $v = t + T$, $dv = dt$, on aura

$$H_T(z) = F_T(z)\, G_T(z) - \int_0^T e^{-z(t+T)}\, dt \int_0^T f(t+T-\xi)\, g(\xi)\, d\xi. \qquad (4.14)$$

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e d e T i c h m a r c h p o u r l e c a s $f(t) = g(t)$. Soit $f(t)$ une fonction

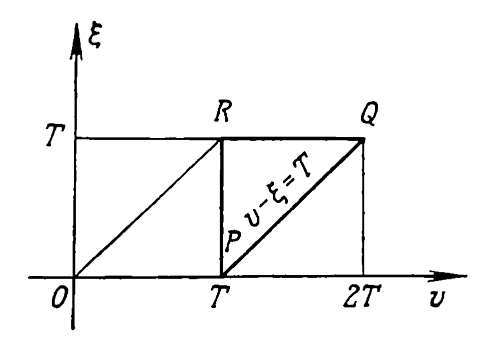


Fig. 23

continue sur $[0, \infty[$ et

$$h(t) = \int_0^t f(t-u)\, f(u)\, du \quad \text{pour} \quad t \in [0, \infty[. \qquad (4.15)$$

Le lemme 5 donne

$$\left(\int_0^T f(t)\, e^{-zt}\, dt\right)^2 = e^{-Tz} \int_0^T e^{-zt}\, dt \int_t^T f(t+T-\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

où $T > 0$ est un nombre fixe quelconque. Posons $z = n$ et $\varphi(t) = \int_t^T f(t+T-\xi)\, f(\xi)\, d\xi$, alors

$$e^{nT} \left(\int_0^T f(t)\, e^{-nt}\, dt\right)^2 = \int_0^T e^{-nt} \varphi(t)\, dt,$$

ou

$$\left(\int_0^T f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right)^2 = \int_0^T e^{-nt} \varphi(t)\, dt.$$

D'où

$$\left| \int_0^T f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right|^2 \leqslant \int_0^T e^{-nt} |\varphi(t)|\, dt \leqslant \int_0^T |\varphi(t)|\, dt;$$

donc

$$\left| \int_0^T f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right| \leqslant \sqrt{\int_0^T |\varphi(t)|\, dt}.$$

De cette inégalité on déduit

$$\left| \int_0^{T/2} f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right| - \left| \int_{\frac{T}{2}}^T f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right| \leqslant \sqrt{\int_0^T |\varphi(t)\, dt}$$

ou, puisque $e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)} \leqslant 1$ lorsque $t \geqslant \frac{T}{2}$,

$$\left| \int_0^{T/2} f(t)\, e^{n\left(\frac{T}{2}-t\right)}\, dt \right| \leqslant \sqrt{\int_0^T |\varphi(t)|\, dt} + \int_{\frac{T}{2}}^T |f(t)\, dt = Q.$$

Enfin, en posant $\frac{T}{2} - t = \xi$, on obtient

$$\left| \int_0^{T/2} f\left(\frac{T}{2} - \xi\right) e^{n\xi}\, d\xi \right| \leqslant Q, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

D'où et en vertu du lemme 3, on conclut que

$$f\left(\frac{T}{2} - \xi\right) = 0 \quad \text{lorsque} \quad \xi \in \left[0,\ \frac{T}{2}\right]$$

ou

$$f(t) = 0 \quad \text{lorsque} \quad t \in \left[0,\ \frac{T}{2}\right],$$

comme $T > 0$ est arbitraire, il suit que $f(t) = 0$ pour tous les $t \geqslant 0$. ■

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e d e T i t c h m a r c h d a n s l e c a s g é n é r a l. Soient $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions continues pour $t \geqslant 0$ et

$$\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = 0 \quad \text{pour} \quad t \in [0,\ \infty[. \tag{4.16}$$

il vient

$$\int_0^t (t-u) f(t-u) g(u)\, du + \int_0^t f(t-u) u g(u)\, du =$$

$$= t \int_0^t f(t-u) g(u)\, du = 0.$$

Posant $f_1(t) = tf(t)$ et $g_1(t) = tg(t)$, l'égalité précédente s'écrit:

$$\int_0^t f_1(t-u) g(u)\, du + \int_0^t f(t-u) g_1(u)\, du = 0.$$

Pour abréger notons fg le produit de convolution des fonctions $f(t)$ et $g(t)$. L'égalité précédente s'écrit alors:

$$f_1 g + f g_1 = 0,$$

d'où

$$f g_1 (f_1 g + f g_1) = 0,$$

où compte tenu des propriétés du produit de convolution

$$f g_1 f_1 g + f g_1 f g_1 = (fg)(f_1 g_1) + (f g_1)(f g_1) = 0.$$

Mais $fg = 0$, donc $(fg_1)(fg_1) = 0$. D'où, en vertu du théorème de Titchmarch démontré pour le cas $f = g$, il vient $fg_1 = 0$ ou

$$\int_0^t f(t-u) u g(u)\, du = 0 \qquad (4.17)$$

pour tous les $t \geqslant 0$. Donc, (4.16) entraîne (4.17).

Supposons que

$$\int_0^t f(t-u) u^n g(u)\, du = 0, \quad t \geqslant 0. \qquad (4.18)$$

Tout comme on a déduit (4.17) de (4.16), de (4.18) on déduit que

$$\int_0^t f(t-u) u^{n+1} g(u)\, du = 0 \quad \text{pour tous les} \quad t \geqslant 0.$$

Donc, (4.18) vaut pour tous les $n \geqslant 0$. D'où en vertu du lemme 4 on conclut que

$$f(t-u) g(u) = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant t < \infty. \qquad (4.19)$$

Si existe un u_0 tel que $g(u_0) \neq 0$, alors de (4.19) il vient $f(t - u_0) = 0$, $t \in [u_0, \infty[$, i.e. $f(t) = 0$ pour tous les $t \geqslant 0$. ■

§ 5. Opérateurs

1. Anneau de fonctions. Notons M l'ensemble de toutes les fonctions définies et dérivables sur la section $0 \leqslant t < \infty$, et dont la dérivée appartient à l'ensemble L *). Toute fonction $F(t) \in M$ peut être mise sous la forme

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(u)\,du, \quad \text{où} \quad f(t) \in L.$$

Inversement, si une fonction $F(t)$ est de la forme

$\int_0^t f(u)\,du + \lambda$, où $f(t) \in L$ et λ est un nombre, alors $F(t) \in M$.

De toute évidence, M est un espace vectoriel pour les opérations ordinaires d'addition de fonctions et de multiplication de fonctions par un nombre, contenu dans L: $M \subset L$.

Lemme 1. *Si des fonctions* $F(t) \in M$ et $g(t) \in L$, *alors le produit de convolution de ces fonctions*

$$H(t) = \int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du$$

appartient à M.

D é m o n s t r a t i o n. La condition $F(t) \in M$ entraîne

$$F(t) = \int_0^t f(u)\,du + F(0), \quad \text{où} \quad f(t) \in L.$$

Soit

$$h(t) = \int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv.$$

Il vient

$$\int_0^t h(u)\,du = \int_0^t du \int_0^u f(u-v)\,g(v)\,dv.$$

En changeant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double, on obtient

$$\int_0^t h(u)\,du = \int_0^t g(v)\,dv \int_v^t f(u-v)\,du,$$

*) Voir définition de L au § 3

ou en posant $u-v=\xi$, $du=d\xi$,

$$\int_0^t h(u)\,du=\int_0^t g(v)\,dv\int_0^{t-v} f(\xi)\,d\xi.$$

Or $\int_0^t f(\xi)\,d\xi=F(t)-F(0)$, donc on a

$$\int_0^t h(u)\,du=\int_0^t F(t-v)\,g(v)\,dv-F(0)\int_0^t g(v)\,dv,$$

d'où

$$H(t)=\int_0^t F(t-v)\,g(v)\,dv=F(0)\int_0^t g(v)\,dv+\int_0^t h(u)\,du. \qquad (5.1)$$

Les deux fonctions du second membre de la dernière égalité appartiennent à M, donc, $H(t)\in M$. ■

Corollaire. *Si des fonctions $F(t)\in M$ et $G(t)\in M$, alors existe la dérivée*

$$\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,G(u)\,du=H(t)$$

et la fonction $H(t)$ appartient de nouveau à M.

En effet, en remplaçant dans (5.1) la fonction $g(t)$ par $G(t)$, on obtient

$$\int_0^t F(t-v)\,G(v)\,dv=F(0)\int_0^t G(v)\,dv+\int_0^t H_1(u)\,du,$$

où

$$H_1(u)=\int_0^u f(u-v)\,G(v)\,dv=\int_0^u G(u-v)\,f(v)\,dv.$$

Le lemme 1 entraîne $H_1(u)\in M$, donc pour tous les $t\geqslant 0$ existe la dérivée

$$H(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-v)\,G(v)\,dv=F(0)\,G(t)+H_1(t)$$

et, de toute évidence, $H(t)\in M$.

Supposons que $F(t)\in M$ et $g(t)\in L$. En vertu du lemme 1 le produit de convolution de ces fonctions appartient à M, donc, ce produit est dérivable. Introduisons la notation

$$h(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du. \qquad (5.2)$$

La fonction $h(t) \in L$. Ceci découle de la définition de l'ensemble M. Il est évident que (5.2) est un opérateur linéaire défini et prenant ses valeurs dans L. Cet opérateur est défini de façon unique par la fonction $F(t)$. Si par exemple $F(t) = t$, on obtient

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t (t-u)\, g(u)\, du = \int_0^t g(u)\, du. \tag{5.3}$$

A la fonction $F(t) = t$ est associé l'opérateur d'intégration. Cette circonstance a été signalé au § 3.

Soit $G(t) \in M$. Considérons les deux opérateurs linéaires

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-u)\, g(u)\, du$$

et

$$q(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t G(t-u)\, g(u)\, du. \tag{5.4}$$

Calculons le produit de ces opérateurs. A cet effet, calculons $\frac{d}{dt} \int_0^t G(t-u)\, h(u)\, du$, où $h(u)$ est définie par (5.2). On a

$$\int_0^t G(t-u)\, h(u)\, du = \int_0^t G(t-u)\, du \frac{d}{du} \int_0^u F(u-\xi)\, g(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^t G(t-u)\, du \left[F(0)\, g(u) + \int_0^u F'(u-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right] =$$

$$= F(0) \int_0^t G(t-u)\, g(u)\, du + \int_0^t G(t-u)\, du \int_0^u F'(u-\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

En intervertissant l'ordre d'intégration dans la dernière intégrale (cf. (4.6)), il vient

$$\int_0^t G(t-u)\, h(u)\, du = F(0) \int_0^t G(t-u)\, g(u)\, du +$$

$$+ \int_0^t g(\xi)\, d\xi \int_\xi^t G(t-u)\, F'(u-\xi)\, du.$$

Dans la deuxième intégrale posons $u = t - \eta$, $du = -a\eta$:

$$\int_0^t G(t-u)\,h(u)\,du = F(0)\int_0^t G(t-u)\,g(u)\,du +$$

$$+\int_0^t g(\xi)\,d\xi \int_0^{t-\xi} F'(t-\xi-\eta)\,G(\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^t g(\xi)\,d\xi\,[F(0)\,G(t-\xi) + \int_0^{t-\xi} F'(t-\xi-\eta)\,G(\eta)\,d\eta].$$

Introduisons la notation :

$$K(t) = F(0)\,G(t) + \int_0^t F'(t-\eta)\,G(\eta)\,d\eta = \frac{d}{dt}\int_0^t F(t-\eta)\,G(\eta)\,d\eta,$$

il vient

$$\frac{d}{dt}\int_0^t G(t-u)\,h(u)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t K(t-\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

D'où il résulte qu'au produit des opérateurs (5.4) correspond la fonction

$$K(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,G(u)\,du.$$

Cette formule a été obtenue au § 3 (cf. (3.12)) pour le cas particulier $F(t) = t^m$ et $G(t) = t^n$.

Munissons l'ensemble M du produit. On appelle *produit des fonctions* $F(t) \in M$ et $G(t) \in M$ la fonction

$$K(t) = F(t) * G(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,G(u)\,du. \qquad (5.5)$$

On a montré (cf. corollaire) que la fonction $K(t)$ appartient de nouveau à M. Il est immédiat de vérifier, en utilisant les propriétés du produit de convolution (cf. § 4), que le produit (5.5) possède les propriétés suivantes qui sont analogues aux propriétés 7) à 10) du § 3.

7) $F(t) * G(t) = G(t) * F(t)$ (*commutativité*),

8) $F(t) * (G(t) * H(t)) = (F(t) * G(t)) * H(t)$ (*associativité*),

9) $F(t) * (G(t) + H(t)) = F(t) * G(t) + F(t) * H(t)$ (*distributivité*),

10) $\lambda F(t) * G(t) = \lambda (F(t) * G(t))$.

D'où il résulte que l'ensemble M, doué du produit (5.5), est un anneau commutatif appelé *anneau de Mikusinski*. On a mentionné

qu'à toute fonction $F(t) \in M$ correspond un opérateur linéaire (5.2). L'anneau M est un anneau d'opérateurs linéaires. Cet anneau est composé de nombres, donc on peut considérer le produit d'un nombre par une fonction $\lambda * F(t)$. D'un autre côté, M étant un espace vectoriel, il est muni du produit d'un nombre par un de ses éléments, ici $\lambda F(t)$.

Le produit (5.5) possède la propriété suivante:

11) *pour toute fonction* $F(t) \in M$ *on a*

$$\lambda * F(t) = \lambda F(t),$$

où λ *est un nombre.*

La démonstration découle de l'égalité

$$\lambda * F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda F(u)\, du = \lambda F(t).$$

Dans le cas particulier $F(t) = \mu$, la propriété 11) donne

$$\lambda * \mu = \lambda\mu,$$

i.e. dans l'anneau M le produit des nombres s'effectue d'après les règles habituelles de l'arithmétique.

Signalons encore une fois que dans le cas général le produit dans un anneau est distinct du produit ordinaire de fonctions. Au § 4 on a calculé le produit de convolution des fonctions t^α et t^β. En dérivant (4.3), on obtient l'égalité

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\, t^{\alpha+\beta}. \tag{5.6}$$

Pour arriver à cette formule on s'est servi de l'égalité

$$\Gamma(2+\alpha+\beta) = (1+\alpha+\beta)\,\Gamma(1+\alpha+\beta).$$

Calculons le produit $L_n(t) * L_m(t)$, où $L_n(t)$ et $L_m(t)$ sont des polynômes de Laguerre d'ordre n et m. On appelle *polynôme de Laguerre* d'ordre n le polynôme [20]

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}, \tag{5.7}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sont des coefficients binômiaux (n est un entier). Compte tenu de (5.3), il vient

$$L_n(t) * L_m(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \frac{t^r}{r!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{k+r} \binom{n}{k} \binom{m}{r} \frac{t^k}{k!} * \frac{t^r}{r!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{k+r} \binom{n}{k} \binom{m}{r} \frac{t^{k+r}}{(k+r)!}.$$

En posant $k + r = \nu$ dans la dernière somme on obtient

$$L_n(t) \ast L_m(t) = \sum_{\nu=0}^{m+n} (-1)^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n}{k} \binom{m}{\nu-k}.$$

Pour calculer la somme $\sum_{k=0}^{\nu} \binom{n}{k} \binom{m}{\nu-k}$ comparons les coefficients en les mêmes puissances de x dans l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} x^r = \sum_{\nu=0}^{m+n} \binom{m+n}{\nu} x^\nu.$$

D'où l'on déduit sans peine

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{n}{k} \binom{m}{\nu-k} = \binom{m+n}{\nu},$$

et, en définitive,

$$L_n(t) \ast L_m(t) = L_{n+m}(t). \tag{5.8}$$

2. Corps d'opérateurs. Dans le paragraphe précédent on a introduit l'anneau M. Prouvons que cet anneau est un anneau d'intégrité, i.e. ne possède pas de diviseurs de zéro.

Soient $F(t) \in M$ et $G(t) \in M$ et l'égalité

$$F(t) \ast G(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-u)\, G(u)\, du = 0 \tag{5.9}$$

est valable pour tous les $t \in [0, \infty[$. Alors le produit de convolution $\int_0^t F(t-u)\, G(u)\, du$ est nul pour tous les $t \geqslant 0$. En appliquant le théorème de Titchmarch, il résulte que l'une au moins des fonctions $F(t)$ ou $G(t)$ est identiquement nulle dans la section $[0, \infty[$. Donc, l'anneau M est un anneau d'intégrité. On sait (cf. § 3, théorème 1) que l'anneau M peut être étendu à un corps de quotients que nous noterons $\mathfrak{M}(M)$. Dans la suite nous écrirons simplement $\mathfrak{M}$. Les éléments de $\mathfrak{M}$ seront appelés *opérateurs.*

Rappelons que les éléments du corps sont des ensembles. Chacun de ces ensembles est constitué de couples équivalents $(F(t), G(t))$, $G(t) \not\equiv 0$. Les éléments du corps sont désignés par $\frac{F}{G}$. Deux couples $(F(t), G(t))$, $(F_1(t), G_1(t))$ sont *équivalents* si $F \ast G_1 = F_1 \ast G$, $\frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1}$ si et seulement si $F \ast G_1 = F_1 \ast G$. La somme et le produit d'opérateurs se calculent comme en arithmétique sauf que le produit

est défini par la formule (5.9). Donc,

$$\frac{F}{G}+\frac{F_1}{G_1}=\frac{F\ast G_1+F_1\ast G}{G\ast G_1},$$

$$\frac{F}{G}\ast\frac{F_1}{G_1}=\frac{F\ast F_1}{G\ast G_1}.$$

L'ensemble de tous les opérateurs du corps se ramenant à la forme $\frac{F}{1}$ constitue un sous-anneau isomorphe au sous-anneau initial M. Donc au lieu de $\frac{F(t)}{1}$ on écrira $F(t)$, i.e. $\frac{F(t)}{1}=F(t)$. Si $F(t)=\lambda$, où λ est un nombre, alors $\frac{\lambda}{1}=\lambda$. En particulier, $\frac{1}{1}=1$ et $\frac{0}{1}=0$. L'expression $\frac{F}{G}$ peut être envisagée comme une division dans le corps $\mathfrak{M}$. Cette dernière se distingue toutefois essentiellement de la division ordinaire. Cette opération sera confondue avec la division ordinaire uniquement dans le cas où F et G sont des costantes, i.e. $F=\lambda$, $G=\mu$.

Considérons dans le corps $\mathfrak{M}$ tous les opérateurs réductibles à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$. L'ensemble de ces opérateurs sera manifestement un espace vectoriel. La fonction $F(t)$ est dérivable et $F'(t)=f(t)$. Associons à l'opérateur $\frac{F(t)}{t}$ la fonction $F'(t)=f(t)$. A deux opérateurs distincts $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$, $\frac{G(t)}{t}$, $G(0)=0$ faisons correspondre les fonctions distinctes $f(t)=F'(t)$, $g(t)=G'(t)$. En effet, si $f(t)$ et $g(t)$ étaient confondues, i.e. $\int_0^t f(u)\,du=\int_0^t g(u)\,du$ pour tous les $t\geqslant 0$, alors $F(t)=G(t)$ pour tous les $t\geqslant 0$. On obtiendrait alors $\frac{F(t)}{t}=\frac{G(t)}{t}$, ce qui contredit l'hypothèse $\frac{F(t)}{t}\neq\frac{G(t)}{t}$. Donc, la correspondance entre l'ensemble de tous les opérateurs de la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$ et l'ensemble de toutes les fonctions $f(t)=F'(t)$ ($F(t)$ est une fonction de l'anneau initial) est biunivoque. Cette correspondance associe à la somme des opérateurs $\frac{F(t)}{t}+\frac{G(t)}{t}$ la somme des fonctions $F'(t)+G'(t)$. Ceci découle des égalités $\frac{F(t)}{t}+\frac{G(t)}{t}=\frac{F(t)+G(t)}{t}$ et $F'(t)+G'(t)=$ $=(F(t)+G(t))'$.

L'image du produit de l'opérateur $\frac{F(t)}{t}$ par λ est le produit de λ par la fonction $f(t)=F'(t)$. En effet, $\lambda\frac{F(t)}{t}=\frac{\lambda F(t)}{t}$ et $(\lambda F(t))'=\lambda F'(t)$. Donc, l'ensemble de tous les opérateurs de la

forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions $f(t)=F'(t)$. Les opérateurs du corps $\mathfrak{M}$ réductibles à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$ seront appelés fonctions et au lieu de $\frac{F(t)}{t}$ on écrira $f(t)$. Ainsi

$$\frac{F(t)}{t}=F'(t)=f(t) \quad \text{si } F(0)=0.$$

Tout opérateur n'est pas réductible à une fonction. En effet, l'opérateur $\frac{1}{t}$ ne peut visiblement pas être ramené à la forme $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$. On a déjà signalé que la somme de fonctions est une fonction. Un exemple simple montre que le produit de fonctions n'est pas toujours une fonction, i.e. le produit des opérateurs $\frac{F(t)}{t}$ et $\frac{G(t)}{t}$, $F(0)=0$, $G(0)=0$ ne peut pas être toujours ramené à la forme $\frac{H(t)}{t}$, $H(0)=0$. En effet, soit $F(t)=G(t)=\sqrt{t}$. On a

$$\frac{F(t)}{t} * \frac{G(t)}{t}=\frac{\sqrt{t} * \sqrt{t}}{t * t}.$$

En vertu de (5.6), il vient

$$\frac{\sqrt{t}}{t} * \frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{\sqrt{t} * \sqrt{t}}{t * t}=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) t}{\Gamma(2)\, t * t}=\frac{\pi}{4t}.$$

Puisque

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma(2)=1.$$

Donc, dans le cas général le produit de fonctions est un opérateur

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit des fonctions* $\frac{F(t)}{t}=f(t)$ *et* $=\frac{G(t)}{t}=g(t)$ *soit une fonction est que le produit de convolution de* $f(t)$ *et* $g(t)$ *appartienne à l'anneau* M *et s'annule pour* $t=0$.

Démonstration. Supposons que le produit $\frac{F(t)}{t} * \frac{G(t)}{t}$ est une fonction. Dans ce cas on a

$$\frac{F(t)}{t} * \frac{G(t)}{t}=\frac{H(t)}{t}, \text{ où } H(t)\in M \text{ et } H(0)=0.$$

Par définition

$$\frac{F(t)}{t} * \frac{G(t)}{t} = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,G(u)\,du}{t * t} =$$

$$= \frac{F(0)\,G(t) + \int_0^t F'(t-u)\,G(u)\,du}{t * t} = \frac{\int_0^t f(t-u)\,G(u)\,du}{t * t} = \frac{H(t)}{t},$$

d'où il suit

$$\frac{\int_0^t f(t-u)\,G(u)\,du}{t} = H(t),$$

ou

$$\int_0^t G(t-u)\,f(u)\,du = t * H(t) = \int_0^t H(u)\,du.$$

Dérivant et compte tenu de ce que $G(0) = 0$, il vient

$$\int_0^t g(t-u)\,f(u)\,du = H(t),$$

d'où il suit que $\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du \in M$.

Inversement, si le produit de convolution $\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du = H(t) \in M$ et $H(0) = 0$, l'égalité

$$\frac{F(t)}{t} * \frac{G(t)}{t} = \frac{\int_0^t f(t-u)\,G(u)\,du}{t * t} = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t f(t-u)\,G(u)\,du}{t} = \frac{H(t)}{t}$$

entraîne que le produit de $\frac{F(t)}{t}$ et $\frac{G(t)}{t}$ sera de nouveau une fonction ; manifestement, $f * g = \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$. ■

Corollaire. *Le produit d'une fonction $F(t) \in M$ par une fonction quelconque $g(t) \in L$ est une fonction.*

En effet, le produit de convolution $\int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du$ (cf. § 5, lemme 1) appartient à l'anneau M et est nul pour $t = 0$.

Au § 4 on a introduit la fonction

$$\eta(t;\ \lambda)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<\lambda, \\ 1 & \text{si} \quad t\geqslant\lambda. \end{cases}$$

On a montré (cf. (4.5)) que le produit de convolution de $\eta\ (t;\ \lambda)$ et $\eta\ (t;\ \mu)$ valait

$$\int_0^t \eta(t-u;\ \lambda)\,\eta(u,\ \mu)\,du=\int_0^t \eta(u;\ \lambda+\mu)\,du.$$

D'où il résulte que le produit de ces fonctions appartient à l'anneau M et le produit $\eta\ (t;\ \lambda) \ast \eta\ (t;\ \lambda)$ est une fonction et visiblement

$$\eta(t;\ \lambda) \ast \eta(t;\ \mu)=\eta(t;\ \lambda+\mu). \tag{5.10}$$

Ainsi le corps $\mathfrak{M}$ contient toutes les fonctions intégrables sur un intervalle fini quelconque $[0,\ T]$. Le corps $\mathfrak{M}$ comprend les nombres complexes et de plus dans $\mathfrak{M}$ le produit des nombres est confondu avec le produit ordinaire des nombres complexes. Donc, l'opérateur est une généralisation de la notion de fonction et de nombre complexe ; on aurait pu appeler les éléments de $\mathfrak{M}$ fonctions généralisées. Mais eu égard à la terminologie consacrée en calcul opérationnel, la dénomination qui convient le mieux pour ces éléments est opérateur. L'opérateur se distingue foncièrement de la fonction. On ne peut en effet parler de la valeur d'un opérateur en un point.

Pour définir l'anneau d'opérateurs M nous sommes partis de la relation

$$h(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du,$$

dans laquelle l'opérateur $F\ (t) \in M$ agit sur la fonction $g\ (t) \in L$. Cet opérateur prend ses valeurs dans L. Mais les fonctions $F\ (t)$ et $g\ (t)$ appartiennent au corps $\mathfrak{M}$. On peut donc calculer le produit des opérateurs $F\ (t)=\frac{F(t)}{1}$ et $g\ (t)=\frac{F(t)}{t}$. Ce produit vaut

$$F(t) \ast g(t)=\frac{F(t) \ast G(t)}{t}=\frac{\int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du}{t}=\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du.$$

Donc, l'action de l'opérateur $F(t)$ sur la fonction $g(t)$ se traduit par le produit des opérateurs $F(t)$ et $g(t)=\frac{G(t)}{t}$, où $G(t)=$
$=\int_0^t g(u)\,du.$

L'opérateur $\frac{F(t)}{t}$ peut être envisagé comme le produit de l'opérateur $\frac{1}{t}$ par la fonction $F(t)$: $\frac{F(t)}{t}=\frac{1}{t}\ast\frac{F(t)}{1}$.

L'opérateur $\frac{1}{t}$ joue un rôle fondamental en calcul opérationnel. On le désigne spécialement par

$$p=\frac{1}{t}. \tag{5.11}$$

La formule (5.9) s'écrit dans ce cas

$$p\ast F(t)=F'(t); \quad F(0)=0. \tag{5.12}$$

Donc lorsque $F(0)=0$, le produit de la fonction $F(t)\in M$ par l'opérateur $p=\frac{1}{t}$ revient à dériver $F(t)$. L'opérateur p peut être multiplié par tout opérateur $\frac{F}{G}$, i.e. le produit $p\ast\frac{F}{G}$ a un sens pour tout opérateur $\frac{F}{G}\in\mathfrak{M}$. Dans le cas général le produit $p\ast\frac{F}{G}$ sera un opérateur. L'opérateur $p=\frac{1}{t}$ s'appelle *opérateur de dérivation.* Si $F(t)$ est une fonction quelconque de M, de (5.12) il suit

$$p\ast(F(t)-F(0))=F'(t),$$

$$p\ast F(t)=F'(t)+pF(0). \tag{5.13}$$

Si $F'(t)\in M$, de (5.13) il suit

$$p\ast(p\ast F(t))=p\ast F'(t)+p^2F(0),$$

ou

$$p^2\ast F(t)=F''(t)+pF'(0)+p^2F(0). \tag{5.14}$$

Dans le cas général où la fonction $F(t)$ possède une dérivée $F^n(t)$ d'ordre n appartenant à L, l'application successive de la formule (5.13) nous conduit à l'expression

$$p^n\ast F(t)=F^{(n)}(t)+pF^{(n-1)}(0)+p^2F^{(n-2)}(0)+\ldots+p^nF(0), \tag{5.15}$$

où p^n désigne le produit $p\ast p\ast\ldots\ast p$ de n opérateurs. L'inverse de l'opérateur p est visiblement l'opérateur $\frac{1}{p}=t$. La fonction $F(t)=t\in M$, donc de (5.11) on déduit

$$\frac{1}{p}\ast f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t(t-u)f(u)\,du=\int_0^t f(u)\,du. \tag{5.16}$$

Donc $\frac{1}{p}$ est l'opérateur d'intégration. En l'appliquant aux deux membres de l'égalité

$$\frac{1}{p}=t, \tag{5.17}$$

on déduit de (5.16) $\frac{1}{p} * \frac{1}{p} = \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{t^2}{2!}$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} = \frac{t^n}{n!}$.

Compte tenu de (5.11), il vient

$$\left(\frac{1}{p}\right)^n * f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f(u)\,du\,;$$

or

$$\left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p} * \frac{1}{p} * \ldots * \frac{1}{p} = \frac{1}{p^n},$$

donc,

$$\frac{1}{p^n} = \frac{t^n}{n!} \tag{5.18}$$

et

$$\frac{1}{p^n} * f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f(u)\,du. \tag{5.19}$$

La formule (5.18) a été démontrée pour les n entiers positifs, mais on peut la généraliser à toute valeur de $n = \nu$, où $\nu \geqslant 0$. Désignons par $\frac{1}{p^\nu}$ la fonction $\frac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}$, où $\nu \geqslant 0$. Ceci posé, (4.3) entraîne

$$\frac{1}{p^\nu} * \frac{1}{p^\mu} = \frac{1}{p^{\nu+\mu}}.$$

Donc, pour tous les $\nu \geqslant 0$ on a

$$\frac{1}{p^\nu} = \frac{t^\nu}{\Gamma(1+\nu)}. \tag{5.20}$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture si aucune confusion n'est à craindre on supprimera le symbole $*$ du produit. Au lieu de $\frac{F}{G} * \frac{F_1}{G_1}$ on écrira donc tout simplement $\frac{F}{G}\frac{F_1}{G_1}$. La formule (5.19) s'écrit alors

$$\frac{1}{p^n} f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f(u)\,du, \tag{5.21}$$

et les formules (5.13), (5.15)

$$F'(t) = pF(t) - pF(0), \tag{5.22}$$

$$F^{(n)}(t) = p^n F(t) - p^n F(0) - p^{n-1}F'(0) - \ldots - pF^{(n-1)}(0). \tag{5.23}$$

On désignera souvent les opérateurs de $\mathfrak{M}$ par une seule lettre, par exemple $\frac{F}{G} = a$, $\frac{H}{R} = b$; etc.

3. Parties finies d'intégrales divergentes et leurs applications au calcul opérationnel. On a montré que le corps $\mathfrak{M}$ contient toutes les fonctions intégrables sur un intervalle fini quelconque $]0, T[$. Il se pose la question de savoir s'il n'est pas possible de démontrer par les mêmes raisonnements que certaines fonctions non intégrables appartiennent au corps $\mathfrak{M}$. Considérons des fonctions non intégrables présentant des singularités pour $t = 0$. Désignons par N_0 l'ensemble des fonctions $f(t)$ remplissant les conditions suivantes:

1. Au voisinage de $t = 0$, i.e. pour $t \in]0, \delta]$ la fonction $f(t)$ peut être mise sous la forme

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \beta_{ik} t^{\alpha_{ik}} \ln^k t + h(t), \tag{5.24}$$

où α_{ik} et β_{ik} sont des nombres réels ou complexes quelconques et la fonction $h(t)$ absolument intégrable sur l'intervalle $]0, \delta[$ et bornée lorsque $t \to +0$.

2. La fonction $f(t)$ est absolument intégrable sur tout intervalle $[\delta, T[$. Il est évident que N_0 est un espace vectoriel.

Calculons l'intégrale indéfinie des fonctions $t^\alpha \ln^k t$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, qui figurent dans le second membre de l'égalité (5.24). Si $\alpha = -1$ il est évident que

$$\int t^{-1} \ln^k t\, dt = \frac{\ln^{k+1} t}{k+1} + C.$$

Si $\alpha \neq -1$, une intégration par parties donne

$$\int t^\alpha \ln^k t\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^k t - \frac{k}{(\alpha+1)} \int t^\alpha \ln^{k-1} t\, dt.$$

Appliquant une nouvelle fois cette formule, on obtient

$$\int t^\alpha \ln^k t\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^k t - \frac{k t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \ln^{k-1} t + \ldots + (-1)^k \frac{k!}{(\alpha+1)^k} \int t^\alpha\, dt,$$

ou

$$\int t^\alpha \ln^k t\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln^k t - \frac{k}{\alpha+1} \ln^{k-1} t + \right.$$
$$\left. + \frac{k(k-1)}{(\alpha+1)^2} \ln^{k-2} t - \ldots + (-1)^k \frac{k!}{(\alpha+1)^k} \right) + C.$$

Définissons la fonction $\Phi_k(t; \alpha)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, en posant

$$\Phi_k(t; \alpha) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln^k t - \frac{k}{\alpha+1} \ln^{k-1} t + \ldots + \frac{k!}{(\alpha+1)^k} \right)$$

pour $\alpha + 1 \neq 0$,

$$\Phi^k(t; \alpha) = \frac{\ln^{k+1} t}{k+1} \quad \text{pour } \alpha + 1 = 0.$$

Pour tous les α on a

$$\int t^{\alpha} \ln^{k} t \, dt = \Phi_{k}(t; \alpha) + C.$$

Supposons que $f(t) \in N_0$. Soit l'intégrale

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{t} f(u) \, du,$$

où $0 < \varepsilon < \delta < t$. En vertu de (5.24), on aura

$$J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\delta} f(u) \, du + \int_{\delta}^{t} f(u) \, du = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \beta_{ik} \int_{\varepsilon}^{\delta} u^{\alpha_{ik}} \ln^{k} u \, du +$$
$$+ \int_{\varepsilon}^{\delta} h(u) \, du + \int_{\delta}^{t} f(u) \, du = \sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\delta; \alpha_{ik}) -$$
$$- \sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\varepsilon; \alpha_{ik}) + \int_{\varepsilon}^{\delta} h(u) \, du + \int_{\delta}^{t} f(u) \, du,$$

ou

$$\int_{\varepsilon}^{t} f(u) \, du + \sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\varepsilon; \alpha_{ik}) = \sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\delta; \alpha_{ik}) +$$
$$+ \int_{\varepsilon}^{\delta} h(u) \, du + \int_{\delta}^{t} f(u) \, du.$$

D'où il résulte que lorsque $\varepsilon \to +0$ existe la limite

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\varepsilon; \alpha_{ik}) + \int_{\varepsilon}^{t} f(u) \, du \right] =$$
$$= \sum_{i, k} \beta_{ik} \Phi_{k}(\delta; \alpha_{ik}) + \int_{0}^{\delta} h(u) \, du + \int_{\delta}^{t} f(u) \, du. \qquad (5.25)$$

Cette limite s'appelle *partie finie* de l'intégrale généralement divergente $\int_{0}^{t} f(u) \, du$ et se note $\left| \overline{\int_{0}^{t} f(u) \, du} \right.$. Si donc l'on pose

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{ik} \beta_{ik} \Phi_{k}(\varepsilon; \alpha_{ik}),$$

pour tous les $t > 0$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\Phi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} f(u) \, du \right] = \left| \overline{\int_{0}^{t} f(u) \, du} \right. . \qquad (5.26)$$

Voici à titre d'exemples deux parties finies d'intégrales

$$1)\ \left|\overline{\int_0^t u^\alpha\,du}\right.=\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1},\quad \alpha\neq-1;\qquad 2)\ \left|\overline{\int_0^t \frac{du}{u}}\right.=\ln t;$$

3) (5.25) et la définition de la partie finie entraînent

$$\left|\overline{\int_0^t u^\alpha \ln^k u\,du}\right.=\Phi_k(t;\ \alpha). \tag{5.27}$$

Propriétés des parties finies d'intégrales

1. *Si*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^t f(u)\,du=\int_0^t f(u)\,du,$$

alors

$$\left|\overline{\int_0^t f(u)\,du}\right.=\int_0^t f(u)\,du.$$

On remarquera que la condition de convergence de l'intégrale $\int_\varepsilon^t f(u)\,du$ lorsque $\varepsilon\to+0$ implique l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon)$; mais par construction de la fonction $\Phi(\varepsilon)$, on voit que cette limite est nulle.

2. *Si α est un nombre, on peut le sortir de la partie finie de l'intégrale, i.e.*

$$\left|\overline{\int_0^t \alpha f(u)\,du}\right.=\alpha\left|\overline{\int_0^t f(u)\,du}\right..$$

3. *Si existent les parties finies* $\left|\overline{\int_0^t f(u)\,du}\right.$ *et* $\left|\overline{\int_0^t g(u)\,du}\right.$, *alors existe la partie finie*

$$\left|\overline{\int_0^t (f(u)+g(u))\,du}\right.$$

et l'on a l'égalité

$$\left|\overline{\int_0^t f(u)\,du}\right.+\left|\overline{\int_0^t g(u)\,du}\right.=\left|\overline{\int_0^t [f(u)+g(u)]\,du}\right..$$

4. *L'intégrale définie* $\int_\alpha^t f(u)\,du$ *est égale à la différence des parties finies des intégrales* $\overline{\left|\int_0^t f(u)\,du\right.}$ *et* $\overline{\left|\int_0^\alpha f(u)\,du\right.}$, *i.e.*

$$\int_\alpha^t f(u)\,du = \overline{\left|\int_0^t f(u)\,du\right.} - \overline{\left|\int_0^\alpha f(u)\,du\right.}.$$

Cette propriété découle de l'identité

$$\int_\alpha^t f(u)\,du = \Phi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t f(u)\,du - \Phi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\alpha f(u)\,du,$$

lorsque $\varepsilon \to +0$.

Corollaire. *Pour* $t > 0$ *on a*

$$\frac{d}{dt}\overline{\left|\int_0^t f(u)\,du\right.} = f(t).$$

Supposons que $f(t) \in N_0$ est dérivable pour tous les $t > 0$ et que sa dérivée $f'(t)$ appartient à N_0. Dans ce cas on peut considérer la partie finie (cf. propriété 4):

$$\overline{\left|\int_0^t f'(u)\,du\right.} = \overline{\left|\int_0^\delta f'(u)\,du\right.} + \int_\delta^t f'(u)\,du.$$

Mais (cf. (5.24)) pour $u \in [0, \delta]$ on a

$$f'(u) = \sum_{i,\,k} \beta_{ik} \frac{d}{du}(u^{\alpha_{ik}} \ln^k u) + h'(u);$$

donc

$$\overline{\left|\int_0^\delta f'(u)\,du\right.} = \sum_{i,\,k} \beta_{ik} \overline{\left|\int_0^\delta \frac{d}{du}(u^{\alpha_{ik}} \ln^k u)\,du\right.} + \int_0^\delta h'(u)\,du.$$

Pour toutes les valeurs entières non négatives de α et k, on a

$$\overline{\left|\int_0^\delta \frac{d}{du}(u^\alpha \ln^k u)\,du\right.} = \overline{\left|\int_0^\delta \alpha u^{\alpha-1} \ln^k u\,du\right.} +$$

$$+ \overline{\left|\int_0^\delta k u^{\alpha-1} \ln^{k-1} u\,du\right.} = \alpha\Phi_k(\delta;\ \alpha-1) +$$

$$+ k\Phi_{k-1}(\delta;\ \alpha-1) = \delta^\alpha \ln^k \delta,$$

et

$$\left|\overline{\int_0^{\delta} f'(u)\,du}\right. = f(\delta) - h(\delta) + \int_0^{\delta} h'(u)\,du,$$

donc,

$$\left|\overline{\int_0^{t} f'(u)\,du}\right. = f(\delta) - h(+0) + \int_0^{t} f'(u)\,du = f(t) - h(+0).$$

et, en définitive,

$$f(t) = \left|\overline{\int_0^{t} f'(u)\,du}\right. = h(+0). \tag{5.28}$$

Pour cette différence il est commode d'utiliser la notation spéciale

$$h(+0) = {}_{t=0}\left|\overline{f(t)}\right.,$$

alors

$$\left|\overline{\int_0^{t} f'(u)\,du}\right. = f(t) - {}_{t=0}\left|\overline{f(t)}\right.. \tag{5.29}$$

Si $\alpha(t)$ possède des dérivées de tout ordre pour $t \in [0, \infty[$, on peut écrire

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{(k)}(0)\,t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\alpha^{(n+1)}(\Theta t), \quad \Theta \in]0, 1[,$$

où n est susceptible d'être choisi aussi grand que l'on veut. D'où il suit que $\alpha(t) f(t) \in N_0$, si seulement $f(t) \in N_0$. Supposons maintenant que la dérivée $f'(t) \in N_0$. On a alors

$$\left|\overline{\int_0^{t} [\alpha(u) f(u)]'\,du}\right. = \alpha(t) f(t) - {}_{t=0}\left|\overline{\alpha(t) f(t)}\right..$$

D'un autre côté,

$$\left|\overline{\int_0^{t} [\alpha(u) f(u)]'\,du}\right. = \left|\overline{\int_0^{t} \alpha'(u) f(u)\,du}\right. + \left|\overline{\int_0^{t} \alpha(u) f'(u)\,du}\right..$$

De là on déduit la propriété suivante d'intégration par parties de la partie finie de l'intégrale.

5.

$$\left|\overline{\int_0^{t} \alpha(u) f'(u)\,du}\right. = \alpha(t) f(t) - {}_{t=0}\left|\overline{\alpha(t) f(t)}\right. - \left|\overline{\int_0^{t} \alpha'(u) f(u)\,du}\right..$$

Calculons la partie finie de l'intégrale

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} u^{\alpha} \ln^k u \, du.$$

Les propriétés 2 et 3 et la formule (5.27) donnent

$$\left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} u^{\alpha} \ln^k u \, du}\right. =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} t^{n-1-r} \left|\overline{\int_0^t u^{r+\alpha} \ln^k u \, du}\right. =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} t^{n-1-r} \Phi_k(t\,;\ r+\alpha).$$

Comme

$$\Phi_k(t\,;\ r+\alpha) = \begin{cases} \dfrac{t^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}\left(\ln^k t - \dfrac{k}{r+\alpha+1}\ln^{k-1} t + \ldots + \dfrac{(-1)^k k!}{(r+\alpha+1)^k}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } r+\alpha+1 \neq 0, \\ \dfrac{\ln^{k+1} t}{k+1} \quad \text{pour } r+\alpha+1 = 0, \end{cases}$$

il vient

$$\left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} u^{\alpha} \ln^k u \, du}\right. =$$

$$= \sum_{r=0,\ r\neq r'}^{n-1} (-1)^r \frac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{r}\frac{t^{n+\alpha}}{r+\alpha+1}\left[\ln^k t - \frac{k}{r+\alpha+1}\ln^{k-1} t + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(-1)^k k!}{(r+\alpha+1)^k}\right] + \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{r'}\binom{n-1}{r'} t^{n+\alpha}\frac{\ln^{k+1} t}{k+1}$$

$$(r' = -\alpha-1). \qquad (5.30)$$

Si $r = 0, 1, \ldots, n-1$, $r+\alpha+1 \neq 0$, la sommation s'effectue sur tous les r entre 0 et $n-1$ dans le second membre de la dernière égalité, quant au terme $(-1)^{r'}\frac{1}{(n-1)!}\binom{n-1}{r'} t^{n+\alpha}\frac{\ln^{k+1} t}{k+1}$, il disparaît.

L'égalité (5.30) entraîne le lemme suivant.

Lemme 2. *Les fonctions*

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left|\overline{\int_0^t (t-u)^{n-1} u^{\alpha} \ln^k u \, du}\right., \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

appartiennent à l'anneau M *pour tous les* $n > -\alpha$.

En effet, si $n + \alpha > 0$, la fonction $\varphi_n(t)$ est continue sur $t \in [0, \infty[$ et sa dérivée est intégrable sur tout intervalle $]0, T[$. Par ailleurs, il est évident que $\varphi(0) = 0$.

Corollaire. *Si une fonction $f(t) \in N_0$, pour tous les n suffisamment grands les fonctions*

$$F_n(t) = \left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du}\right. \tag{5.31}$$

appartiennent à M et $F_n(0) = 0$.

Pour $\alpha = \varepsilon$ la propriété 4 et la substitution de $\frac{1}{(n-1)!}(t-u)^{n-1} f(u)$ à $f(u)$ conduisent à

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_\varepsilon^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du = \left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du}\right. - \left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\varepsilon (t-u)^{n-1} f(u)\,du}\right.. \tag{5.32}$$

De toute évidence, l'expression

$$P_{n-1}(t;\ \varepsilon) = \left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\varepsilon (t-u)^{n-1} f(u)\,du}\right.$$

est un polynôme de degré $n - 1$ en t dont les coefficients dépendent de ε. Avec les notations adoptées l'expression (5.31) s'écrit

$$F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_\varepsilon^t (t-u)^{n-1} f(u)\,du + P_{n-1}(t;\ \varepsilon). \tag{5.33}$$

En remarquant que

$$\frac{d}{dt} P_{n-1}(t;\ \varepsilon) = \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{t^{n-1-r}}{(n-1)!} \left|\overline{\int_0^\varepsilon u^r f(u)\,du}\right. =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-2}{r} \frac{t^{n-2-r}}{(n-2)!} \left|\overline{\int_0^\varepsilon u^r f(u)\,du}\right. = P_{n-2}(t;\ \varepsilon).$$

de (5.33) il vient pour $n > 1$

$$F'_n(t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t (t-u)^{n-2} f(u)\,du + P_{n-2}(t;\ \varepsilon) = F_{n-1}(t).$$

Lorsque $n = 1$, (5.33) entraîne aussitôt

$$F'_1(t) = f(t) = F_0(t). \tag{5.34}$$

Ainsi pour tous les $n \geqslant 1$, on a

$$F'_n(t) = F_{n-1}(t) \tag{5.35}$$

et

$$\frac{d^n F_n(t)}{dt^n} = f(t). \tag{5.36}$$

Soit maintenant n_0 tel que $F_{n_0} \in M$. Pour tous les $n \geqslant n_0$, on a $F_n(t) \in M$ et l'opérateur $p^n F_n(t)$ appartient au corps $\mathfrak{M}$.

Montrons que l'opérateur $p^n F_n(t)$ ne dépend pas de n. Soit $n \in]m, n_0]$ et $l = m - n$. De (5.35), il suit

$$F'_m(t) = F_{m-1}(t), \ldots, F_m^{(l)}(t) = F_{m-l}(t) = F_n(t)$$

par ailleurs, $F_n(0) = 0$ pour tous les $n \geqslant n_0$, donc

$$F_n(t) = F_m^{(l)}(t) = p^{(l)} F_m(t) = p^{m-n} F_m(t)$$

ou

$$p^n F_n(t) = p^m F_m(t) \quad \text{quels que soient } n \in [m, n_0].$$

L'opérateur $p^n F_n(t)$ ne dépend donc que du choix de la fonction $f(t)$. Par conséquent, à toute fonction $f(t) \in N_0$ correspond l'opérateur

$$a = p^n \left| \overline{\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\, du} \in \mathfrak{M}. \right.$$

Cette correspondance possède les propriétés suivantes (cf. propriétés 2 et 3 des parties finies) :

1. *Si à une fonction $f(t)$ correspond un opérateur a, à la fonction $\lambda f(t)$, où λ est un nombre, correspond l'opérateur λa.*

2. *Si à une fonction $f(t)$ est associé un opérateur a et à une fonction $g(t) \in N_0$ un opérateur b, à la somme $f(t) + g(t)$ est associé l'opérateur $a + b$.*

3. *Si $f(t) \in L$ et*

$$p^n \left| \overline{\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)\, du} = p^n \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du = f(t)\,; \right.$$

et dans ce cas l'opérateur a est confondu avec la fonction $f(t)$.

Désignons par $f(t)$ l'opérateur $p^n F_n(t)$ (cf. (5.31)) où $f(t) \in N_0$:

$$f(t) = p^n \left| \overline{\int_0^t \frac{1}{(n-1)!} (t-u)^{n-1} f(u)\, du.} \right. \tag{5.37}$$

Cette notation est justifiée par les propriétés 1, 2, 3 et l'égalité (5.36).

Supposons que pour tous les $t \in]\,0, \infty[$ la fonction $f(t)$ possède une dérivée $f'(t) \in N_0$. Eu égard à la propriété 5, il vient

$$\left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f'(u)\,du}\right. =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} t^{n-1-r} \left|\overline{\int_0^t u^r f'(u)\,du}\right. =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} t^{n-1-r}\Big[t^r f(t) - {}_{t=0}\left|\overline{t^r f(t)}\right. -$$

$$-\left|\overline{r\int_0^t u^{r-1} f(u)\,du}\right.\Big] = -\frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} t^{n-1-r}\,{}_{t=0}\left|\overline{t^r f(t)}\right. +$$

$$+\left|\overline{\int_0^t \frac{(t-u)^{n-2}}{(n-2)!} f(u)\,du}\right..$$

Posons

$${}_{t=0}\left|\overline{t^r f(t)}\right. = f_r, \qquad r = 0,\ 1,\ 2\ \ldots, \tag{5.38}$$

on aura alors (cf. (5.31))

$$\left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f'(u)\,du}\right. = -\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{f_r t^{n-1-r}}{r!\,(n-1-r)!} + F_{n-1}(t).$$

Or

$$t^{n-1-r} = \frac{(n-1-r)!}{p^{n-1-r}},$$

donc

$$p^n \left|\overline{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-u)^{n-1} f'(u)\,du}\right. = -\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{f_r p^{r+1}}{r!} + p^n F_{n-1}(t),$$

et, compte tenu de (5.37)

$$f'(t) = pf(t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r f_r p^{r+1}}{r!}, \quad n > n_0.$$

Il est commode de représenter la dernière égalité par

$$f'(t) = p\left[f(t) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r f_r p^r}{r!}\right]. \tag{5.39}$$

La série de cette égalité est composée d'un nombre fini de termes non nuls, puisque de toute évidence (cf. 5.28)) $f_r = 0$ pour tous les suffisamment grands ($r \geqslant n_0$).

Si dans (5.39) on pose $f'(t) \in L$, alors toutes les $f_r = 0$ pour $r > 0$ et $f_0 = f(0)$. L'expression (5.39) s'écrit alors

$$f'(t) = p\,[f(t) - f(0)]$$

i.e. est confondue avec (5.22).

Les résultats obtenus peuvent être formulés ainsi.

Théorème 2. *L'ensemble* N_0 *est contenu dans le corps* $\mathfrak{M}$.

Traitons les cas particuliers. Soit $f(t) = t^{\alpha}$, où α est différent d'un entier négatif. On a alors (cf. (5.28))

$$f_r = {}_{t=0}\left|\overline{t^r f(t)} = {}_{t=0}\right|\overline{t^{r+\alpha}} = 0$$

pour tous les $r \geqslant 0$, donc (5.39) entraîne

$$\frac{d}{dt}\,t^{\alpha} = pt^{\alpha} \tag{5.40}$$

Si α n'est pas égal à un entier négatif, le produit des opérateurs p et t^{α} se calcule comme la dérivée d'une fonction puissance. Si $\alpha = -m$ où m est un entier positif, alors $f_r = 0$ pour $r \neq m$ et $f_m = 1$ et (5.39) entraîne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^m}\right) = p\left[\frac{1}{t^m} - \frac{(-1)^m p^m}{m\,!}\right] \tag{5.41}$$

Calculons $F_n(t)$ lorsque $f(t) = t^{\alpha}$. Si α n'est pas égal à un entier négatif, de (5.30) on déduit

$$F_n(t) = \frac{t^{\alpha+n}}{(n-1)\,!}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{1}{\alpha+r+1}\,.$$

Dans le second membre, la somme peut être exprimée par l'inter médiaire de la fonction gamma. En effet, si α est positif on a

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\frac{1}{\alpha+r+1} = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{n-1}{r}\int_0^1 \xi^{\alpha+r}\,d\xi =$$

$$= \int_0^1 \xi^{\alpha}(1-\xi)^{n-1}\,d\xi = \frac{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n+1)}$$

En vertu du principe du prolongement analytique, la dernière égalité est valable pour tous les α pour lesquels les second et premier membres de cette égalité ont un sens. Donc,

$$F_n(t) = \frac{t^{n+\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\,,$$

d'où

$$t^{\alpha} = p^n F_n(t) = p^n\,\frac{t^{\alpha+n}\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\,.$$

Or pour $n+\alpha>0$, on a

$$\frac{t^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha+n+1)}=\frac{1}{p^{n+\alpha}},$$

et en définitive

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}=\frac{1}{p^{\alpha}}, \quad \alpha \neq -1, \ -2, \ \ldots .$$

Les formules (5.19) et (5.20) sont valables pour tous les α non égaux à des entiers négatifs.

Si α est égal à un entier négatif: $\alpha=-m$, alors avec $m \geqslant 1$, on aura (cf. (5.30)) pour $n=m$:

$$F_m(t)=\frac{1}{(m-1)!}\left[\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{m-1}{r}\frac{1}{r+1-m}+(-1)^{m-1}\ln t\right].$$

Si $m=1$, alors $F_1(t)=\ln t$. Calculons la somme

$$-\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{m-1}{r}\frac{1}{m-1-r}=$$

$$=-\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{m-1}{r}\int_0^1 \xi^{m-r-2}\,d\xi=$$

$$=-\int_0^1\left[\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{m-1}{r}\xi^{m-1-r}-(-1)^{m-1}\right]\frac{d\xi}{\xi}=$$

$$=-\int_0^1\frac{(\xi-1)^{m-1}-(-1)^{m-1}}{\xi}\,d\xi=(-1)^{m-1}\int_0^1\frac{1-(1-\xi)^{m-1}}{\xi}\,d\xi.$$

Posons

$$I_n=\int_0^1\frac{1-(1-\xi)^{n-1}}{\xi}\,d\xi;$$

Il vient

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{(1-\xi)^{n-1}-(1-\xi)^n}{\xi}\,d\xi=\int_0^1(1-\xi)^{n-1}\,d\xi=\frac{1}{n}.$$

Donc, $I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n}$; or $I_1=0$, donc

$$I_n=\int_0^1\frac{1-(1-\xi)^{n-1}}{\xi}\,d\xi=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

et

$$-\sum_{r=0}^{m-2}(-1)^r\binom{m-1}{r}\frac{1}{m-1-r}=(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k},$$

i.e. pour $\alpha=-m$, $m=1, 2, 3, \ldots$, on a

$$F_1(t)=\ln t, \quad F_m(t)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\ln t+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k}\right]. \qquad (5.42)$$

A noter que l'on démontre (ce que nous omettrons faute de place) par les mêmes raisonnements que des fonctions non intégrables à particularités et logarithmiques en un nombre fini de points de l'intervalle]0, ∞[de variation de t appartiennent également au corps $\mathfrak{M}$.

4. Opérateurs rationnels. L'étude des opérateurs de la forme $R(p)$ constitue l'un des principaux chapitres du calcul opérationnel ; $R(z)$ est une fonction de la variable z. Dans le cas le plus simple où $R(z)=\sum_k \alpha_k z^k$ est un polynôme, l'opérateur $R(p)=\sum_k \alpha_k p^k$. Les opérations sur de tels polynômes s'effectuent comme en algèbre élémentaire. Par exemple

$$(p^2+2p+1)(p-1)=p^3+p^2-p-1=p^2(p+1)-(p+1)=$$
$$=(p^2-1)(p+1).$$

Si deux polynômes de l'opérateur p sont égaux, i.e.

$$P(p)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^k=Q(p)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k p^k,$$

leurs coefficients α_k et β_k le sont également. En effet, si $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^k=\sum_{k=0}^{n}\beta_k p^k$, en multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{p^n}$, on aura

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{p^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k}{p^{n-k}}$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}, \qquad 0\leqslant t<\infty.$$

D'où, en vertu d'un théorème connu, relatif aux polynômes ordinaires, il vient

$$\alpha_k=\beta_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Théorème 3. *Si le polynôme* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ *est réductible à une fonction alors* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Ce théorème entraîne que si le degré du polynôme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ est plus grand ou égal à l'unité, l'opérateur correspondant $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ ne peut être réductible à une fonction.

Démonstration. Soit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k p^k = f(t)$, $n \geqslant 1$. Multipliant cette égalité par l'opérateur $\frac{1}{p^n}$, et en vertu de (5.21), on aura

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{p^{n-k}} = \frac{1}{p^n} f(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du$$

ou

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k t^{n-k}}{(n-k)!} = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du.$$

En faisant $t = 0$, on obtient $\alpha_n = 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p^k = f(t).$$

Si $n-1 \geqslant 1$, en multipliant la dernière égalité par $\frac{1}{p^{n-1}}$ on trouve $\alpha_{n-1} = 0$; si $n-2 \geqslant 1$, on obtient par analogie $\alpha_{n-2} = 0$ et ainsi de suite jusqu'à $\alpha_1 = 0$. ■

Soit $P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p^k$ et $Q_m(p) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k p^k$. L'ensemble de tous les opérateurs de la forme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n p^k$, $0 \leqslant n < \infty$ constituent un anneau susceptible d'être étendu à un corps de quotients dont les éléments seront des fractions rationnelles de l'opérateur p, i.e. des opérateurs de la forme

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k p^k}{\sum_{k=0}^{m} \beta_k p^k} = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)} = R(p).$$

Les opérateurs $P_n(p)$ et $Q_m(p)$ appartiennent au corps $\mathfrak{M}$. Donc leur quotient $R(p)$ appartient également au corps $\mathfrak{M}$. L'opérateur

$R(p)$ est appelé *opérateur rationnel.* A toute fraction rationnelle $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ est associé l'opérateur rationnel $R(p)$. Cette correspondance établit un isomorphisme entre le corps des fractions rationnelles et celui des opérateurs rationnels. Le corps des opérateurs est contenu dans $\mathfrak{M}$, donc c'est un sous-corps de $\mathfrak{M}$.

Voyons quelques exemples. Posons $F(t) = e^{\mu t}$ dans (5.22). On aura $pe^{\mu t} = \mu e^{\mu t} + p$ ou $pe^{\mu t} - \mu e^{\mu t} = p$, d'où $(p-\mu) e^{\mu t} = p$ et $(p-\mu) e^{\mu t} = p$. Donc,

$$\frac{p}{p-\mu} = e^{\mu t}. \tag{5.43}$$

Multipliant la dernière égalité par l'opérateur $\frac{1}{p} = t$, on obtient

$$\frac{1}{p-\mu} = t * e^{\mu t} = \int_0^t e^{\mu u}\, du = \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}.$$

Donc,

$$\frac{\mu}{p-\mu} = e^{\mu t} - 1. \tag{5.44}$$

Les formules (5.43) et (5.44) entraînent

$$\frac{p-\lambda}{p-\mu} = \frac{p}{p-\mu} - \frac{\lambda}{p-\mu} = e^{\mu t} - \frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu t} - 1),$$

$$\frac{p-\lambda}{p-\mu} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}. \tag{5.45}$$

Donc de (5.44) et (5.45), il suit que les opérateurs rationnels de la forme $\frac{1}{p-\lambda}$ et $\frac{p-\lambda}{p-\mu}$ sont des fonctions de M.

Le produit de (5.43) par (5.44) donne

$$\frac{p}{(p-\mu)^2} = e^{\mu t} * \frac{e^{\mu t}-1}{\mu} = \frac{1}{\mu}(e^{\mu t} * e^{\mu t} - e^{\mu t}).$$

Or

$$e^{\mu t} * e^{\mu t} = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{\mu(t-u)+\mu u}\, du = \frac{d}{dt}(te^{\mu t}) = e^{\mu t} + \mu t e^{\mu t}.$$

Donc,

$$\frac{p}{(p-\mu)^2} = \frac{1}{\mu}(\mu t e^{\mu t}) = te^{\mu t}.$$

Prouvons

$$\frac{p}{(p-\mu)^{n+1}} = \frac{t^n e^{\mu t}}{n!}. \tag{5.46}$$

En effet, (5.46) est valable pour un certain n; en la multipliant par $\frac{1}{p-\mu}$, on obtient

$$\frac{p}{(p-\mu)^{n+2}}=\frac{t^n e^{\mu t}}{n\,!} \ast \frac{e^{\mu t}-1}{\mu}=\frac{1}{\mu n\,!}(t^n e^{\mu t} \ast e^{\mu t}-t^n e^{\mu t}).$$

Or

$$t^n e^{\mu t} \ast e^{\mu t}=\frac{d}{dt}\int_0^t e^{\mu(t-u)}u^n e^{\mu u}\,du=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{n+1}e^{\mu t}}{n+1}\right)=\frac{t^{n+1}\mu e^{\mu t}}{n+1}+t^n e^{\mu t},$$

donc

$$\frac{p}{(p-\mu)^{n+2}}=\frac{1}{\mu n\,!}\left(\frac{t^{n+1}\mu e^{\mu t}}{n+1}+t^n e^{\mu t}-t^n e^{\mu t}\right)=\frac{t^{n+1}e^{\mu t}}{(n+1)\,!}.$$

Ainsi, la formule (5.46) vaut $n+1$, or elle est valable pour $n=0$, donc, elle le sera pour tous les n entiers positifs.

Une question se pose: quelles sont les fractions rationnelles $R(z)$ dont l'opérateur correspondant $R(p)$ se ramène à une fonction? La réponse est fournie par le théorème suivant.

Théorème 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur* $R(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ *se ramène à une fonction est que le degré du polynôme* $P(p)$ *soit inférieur ou égal à celui de* $Q(p)$.

D é m o n s t r a t i o n. Condition nécessaire. Soit n le degré du polynôme de $P(p)$, m celui de $Q(p)$, $n \leqslant m$. Factorisons ces polynômes

$$P(p)=\alpha_n(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n);$$
$$Q(p)=\beta_m(p-\mu_1)(p-\mu_2)\ldots(p-\mu)_m,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont respectivement les zéros (y compris les zéros multiples) de $P(p)$ et $Q(p)$. On a

$$R(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{\alpha_n}{\beta_m}\,\frac{p-\lambda_1}{p-\mu_1}\,\frac{p-\lambda_2}{p-\mu_2}\ldots\frac{p-\lambda_n}{p-\mu_n}\,\frac{1}{(p-\mu_{n+1})\ldots(p-\mu_m)}.$$

On voit que l'opérateur $R(p)$ est le produit d'un nombre fini d'opérateurs de la forme $\frac{p-\lambda}{p-\mu}$ et $\frac{1}{p-\mu}$. Or (cf. (5.44), (5.45)) les opérateurs de ce type appartiennent à l'anneau M, i.e. l'opérateur $R(p)$ appartient à M. Donc $R(p)$ se ramène à une fonction de M. Donc, la condition $n \leqslant m$ est suffisante pour que l'opérateur $R(p)$ soit réductible à une fonction.

Condition suffisante. Supposons que $R(p)$ est une fonction. Montrons que $n \leqslant m$. Si $n > m$, alors $R(p)$ peut être mis sous la forme

$$R(p)=N(p)+R_1(p),$$

où $N(p)$ est un polynôme de degré supérieur à zéro et $R_1(p)$ un opérateur rationnel dont le degré du numérateur est inférieur ou

égal à celui du dénominateur. D'après ce qui précède $R_1(p)$ est une fonction. Donc l'opérateur $N(p) = R(p) - R_1(p)$ se ramène à une fonction, or du théorème 1 il résulte que le degré de $N(p)$ est nul, i.e. $N(p)$ est une constante. Ceci contredit l'hypothèse $n > m$. Ainsi, $n \leqslant m$. ∎

Si donc $n \leqslant m$, il existe une fonction $\varphi(t)$ telle que $R(p) = \varphi(t)$ où $\varphi(t) \in M$. Les valeurs de $R(p) f(t)$, où $f(t)$ est une fonction quelconque de L, se calculent par la formule

$$R(p) f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad \varphi(t) \in M. \tag{5.47}$$

Si les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ du dénominateur $Q(p)$ sont simples et $Q(0) \neq 0$, alors

$$\frac{P(p)}{pQ(p)} = \frac{1}{p} \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{p-\mu_k},$$

où

$$\alpha_k = \lim_{p \to \mu_k} \frac{(p-\mu_k) P(p)}{pQ(p)} = \lim_{p \to \mu_k} \frac{P(p)}{p \dfrac{Q(p)-Q(\mu_k)}{p-\mu_k}} = \frac{P(\mu_k)}{\mu_k Q'(\mu_k)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{P(\mu_k)}{\mu_k Q'(\mu_k)} \frac{p}{p-\mu_k} =$$

$$= \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{P(\mu_k)}{\mu_k Q'(\mu_k)} \cdot \exp(\mu_k t).$$

Et l'on a

$$\varphi(t) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{P(\mu_k)}{\mu_k Q'(\mu_k)} \cdot \exp(\mu_k t). \tag{5.48}$$

Si $Q(0) = 0$, cela signifie que $Q(p) = pQ_1(p)$ où $Q_1(0) \neq 0$. En utilisant (5.48), on trouve $\dfrac{P(p)}{Q(p)} = \varphi_1(t)$, d'où l'on déduit

$$\varphi(t) = \frac{1}{p} * \varphi_1(t) = \int_0^t \varphi_1(u)\, du.$$

Le cas des racines multiples est plus complexe. Si par exemple $\mu = \mu_1$ est une racine multiple de multiplicité r, la décomposition de $\dfrac{P(p)}{PQ(p)}$ en fractions élémentaires fait apparaître des fractions de la forme $\dfrac{A_r}{(p-\mu_1)^r}$, et $\varphi(t)$ contiendra des termes $A_r t^{r-1} e^{\mu_1 t}$. Dans

le cas général la fonction $\varphi(t)$ sera donc de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k,\, r} A_{kr} t^{r-1} e^{\lambda_k t}.$$

Ce cas est traité plus en détail dans la résolution d'une équation différentielle au § 10 (point 1).

5. Opérateurs transformables-Laplace. Désignons par S l'ensemble des fonctions $f(t)$ dont l'intégrale de Laplace

$$f^*(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt \tag{5.49}$$

est absolument convergente, par S^* l'ensemble des fonctions à variable complexe $z = x + iy$, représentables par l'intégrale (5.49), où $f(t) \in S$. On a vu au chapitre premier, § 2, que l'ensemble S^* était composé de fonctions analytiques dans les demi-plans $\operatorname{Re} z > \gamma$. Le nombre γ dépend en général du choix de la fonction $f^*(z)$. Visiblement S^* est un espace vectoriel. Par ailleurs, le théorème de Borel (propriété 9, § 2) entraîne que si $f^*(z) \in S^*$ et $g^*(z) \in S^*$, leur produit $f^*(z)\, g^*(z)$ appartiendra également à S^*, i.e. S^* est un anneau pour les opérations ordinaires d'addition et de multiplication.

Définition 1. *Un opérateur $a \in \mathfrak{M}$ est transformable-Laplace si existe un représentant $(F(t),\ G(t))$ tel que $a = \frac{F(t)}{G(t)}$ et les intégrales de Laplace des fonctions $F(t)$ et $G(t)$ soient convergentes, i.e. existent les intégrales*

$$F^*(z) = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega F(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^\infty F(t)\, e^{-zt}\, dt\,;$$

$$G^*(z) = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega G(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^\infty G(t)\, e^{-zt}\, dt. \tag{5.50}$$

Les propriétés de l'intégrale de Laplace (cf. propriété 6, § 2) entraînent que si l'intégrale de Laplace de la fonction $F(t)$ est convergente, celle de la fonction $F_1(t) = \int_0^t F(u)\, du = t \ast F(t)$ l'est absolument. Par ailleurs, il est évident que $a = \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{t \ast F(t)}{t \ast G(t)}$. Donc, si l'opérateur $a = \frac{F(t)}{G(t)}$ est transformable-Laplace, sans nuire à la généralité, on peut toujours considérer que les intégrales (5.50) sont absolument convergentes. Nous en conviendrons dans la suite.

Théorème 5. *L'ensemble des opérateurs transformables-Laplace constitue un corps, noté $\mathfrak{M}(S)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que l'opérateur $a = \frac{F}{G} \in \mathfrak{M}$ est transformable-Laplace et $a \neq 0$. Il est évident alors que l'opérateur $\frac{1}{0} = \frac{G}{F}$ est également transformable-Laplace. Si, par ailleurs, $a_1 = \frac{F_1}{G_1}$ et $a_2 = \frac{F_2}{G_2}$ sont deux opérateurs transformables-Laplace, leur somme $a_1 + a_2$ et leur produit $a_1 \ast a_2$ seront également des opérateurs transformables-Laplace. En effet,

$$a_1 + a_2 = \frac{F_1 \ast G_2 + F_2 \ast G_1}{G_1 \ast G_2},$$

ou

$$a_1 + a_2 = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t F_1(t-u)\, G_2(u)\, du + \frac{d}{dt}\int_0^t F_2(t-u)\, G_1(u)\, du}{\frac{d}{dt}\int_0^t G_1(t-u)\, G_2(u)\, du} =$$

$$= \frac{\int_0^t F_1(t-u)\, G_2(u)\, du + \int_0^t F_2(t-u)\, G_1 u\, (du)}{\int_0^t G_1(t-u)\, G_2(u)\, du}.$$

Les intégrales de Laplace de $F_1(t)$, $F_2(t)$, $G_1(t)$ et $G_2(t)$ sont absolument convergentes. En vertu du théorème de Borel, l'intégrale de Laplace du produit de convolution de telles fonctions sera également absolument convergente. Donc, l'intégrale de Laplace des fonctions

$$H(t) = \int_0^t F_1(t-u)\, G_2(u)\, du + \int_0^t F_2(t-u)\, G_1(u)\, du,$$

$$R(t) = \int_0^t G_1(t-u)\, G_2(u)\, du$$

le sera et l'opérateur $a_1 + a_2$ est transformable-Laplace.

De façon analogue, l'égalité

$$a_1 \ast a_2 = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t F_1(t-u)\, F_2(u)\, du}{\frac{d}{dt}\int_0^t G_1(t-u)\, G_2(u)\, du} = \frac{\int_0^t F_1(t-u)\, F_2(u)\, du}{\int_0^t G_1(t-u)\, G_2(u)\, du}$$

entraîne que l'opérateur $a_1 * a_2$ est transformable-Laplace. Le corps $\mathfrak{M}(S)$ est manifestement un sous-corps du corps $\mathfrak{M}$.

Presque tous les problèmes relevant du calcul opérationnel sont rattachés au corps $\mathfrak{M}(S)$. Aussi le lecteur intéressé par le calcul opérationnel en tant qu'outil de résolution des problèmes pratiques peut-il se limiter à la seule étude du corps $\mathfrak{M}(S)$.

Définition 2. *Soit* $a = \frac{F}{G} \in \mathfrak{M}(S)$. *La fonction de la variable complexe* $z = x + iy$

$$\bar{a}(z) = \frac{F^*(z)}{G^*(z)}, \tag{5.51}$$

où

$$F^*(z) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-zt}\, dt \quad et \quad G^*(z) = \int_0^\infty G(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

est la transformée de Laplace de l'opérateur $a = \frac{F(t)}{G(t)}$.

Prouvons que la définition de la fonction $\bar{a}(z)$ est indépendante du choix du représentant $(F(t), G(t))$. En effet, si

$$a = \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F_1(t)}{G_1(t)} \quad \text{et} \quad \bar{a}_1(z) = \frac{F_1^*(z)}{G_1^*(z)},$$

ou

$$F_1^*(z) = \int_0^\infty F_1(t)\, e^{-zt}\, dt, \quad G_1^*(z) = \int_0^\infty G_1(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

la condition

$$F * G_1 = F_1 * G \quad \text{ou} \quad \int_0^t F(t-u)\, G_1(u)\, du = \int_0^t F_1(t-u)\, G(u)\, du$$

entraîne (cf. théorème de Borel — propriété 9, § 2)

$$F^*(z)\, G_1^*(z) = F_1^*(z)\, G^*(z) \quad \text{ou} \quad \bar{a}_1(z) = \bar{a}(z)$$

Donc, la fonction $\bar{a}(z)$ est définie de façon unique par l'opérateur $a \in \mathfrak{M}(S)$.

Ainsi, à tout opérateur $a \in \mathfrak{M}(S)$ correspond une fonction $\bar{a}(z)$ définie par (5.51). Cette correspondance entre a et $\bar{a}(z)$ est souvent notée

$$a \doteqdot \bar{a}(z). \tag{5.52}$$

Désignons par $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ l'image du corps $\mathfrak{M}(S)$ par l'application (5.52); les éléments de $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ sont les fonctions $\bar{a}(z) = \frac{F^*(z)}{G^*(z)}$ où $F^*(z)$ et $G^*(z)$ sont représentables par des intégrales de Laplace absolument convergentes.

Théorème 6. *L'application* (5.52) *de* $\mathfrak{M}(S)$ *dans* $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ *est une bijection qui associe à la somme des opérateurs* $a_1 + a_2$ *la somme des fonctions* $\overline{a}_1(z) + \overline{a}_2(z)$, *au produit des opérateurs* $a_1 \ast a_2$ *le produit ordinaire des fonctions* $\overline{a}_1(z)\,\overline{a}_2(z)$, *le zéro et l'unité de* $\mathfrak{M}(S)$, *au zéro et à l'unité de* $\overline{\mathfrak{M}}(S)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $a_1 \in \mathfrak{M}(S)$, $a_2 \in \mathfrak{M}(S)$ et $a_1 \doteqdot \overline{a}_1(z)$, $a_2 \doteqdot \overline{a}_2(z)$. Prouvons les relations

$$a_1 + a_2 \doteqdot \overline{a}_1(z) + \overline{a}_2(z) \quad \text{et} \quad a_1 \ast a_2 \doteqdot \overline{a}_1(z)\,\overline{a}_2(z).$$

On a

$$a_1 + a_2 = \frac{F_1 \ast G_2 + F_2 \ast G_1}{G_1 \ast G_2} = \frac{\int_0^t F_1(t-u)\,G_2(u)\,du + \int_0^t F_2(t-u)\,G_1(u)\,du}{\int_0^t G_1(t-u)\,G_2(u)\,du}.$$

Pour représentant de l'opérateur $a_1 + a_2$ prenons le couple

$$\left(\int_0^t F_1(t-u)\,G_2(u)\,du + \int_0^t F_2(t-u)\,G_1(u)\,du,\ \int_0^t G_1(t-u)\,G_2(u)\,du\right),$$

que nous noterons brièvement $(H(t),\ R(t))$. Le théorème de Borel entraîne

$$\int_0^\infty H(t)\,e^{-zt}\,dt = F_1^*(z)\,G_2^*(z) + F_2^*(z)\,G_1^*(z),$$

$$\int_0^\infty R(t)\,e^{-zt}\,dt = G_1^*(z)\,G_2^*(z).$$

On a donc

$$a_1 + a_2 \doteqdot \frac{F_1^*(z)\,G_2^*(z) + F_2^*(z)\,G_1^*(z)}{G_1^*(z)\,G_2^*(z)} = \frac{F_1^*(z)}{G_1^*(z)} + \frac{F_2^*(z)}{G_2^*(z)} = \overline{a}_1(z) + \overline{a}_2(z).$$

De façon analogue,

$$a_1 \ast a_2 = \frac{F_1 \ast F_2}{G_1 \ast F_2} = \frac{\int_0^t F_1(t-u)\,F_2(u)\,du}{\int_0^t G_1(t-u)\,G_2(u)\,du},$$

d'où il vient

$$a_1 \ast a_2 \doteqdot \frac{F_1^*(z)\,F_2^*(z)}{G_1^*(z)\,G_2^*(z)} = \overline{a}_1(z)\,\overline{a}_2(z).$$

L'application (5.52) associe manifestement l'élément nul de $\mathfrak{M}(S)$ à l'élément nul de $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ et à aucun autre. Prouvons ceci par

l'absurde. Supposons que $a \doteqdot 0$, alors $\int_0^\infty F(t)\, e^{-zt}\, dt = 0$ et en vertu de la propriété 8 (§ 2), de l'intégrale de Laplace, la fonction $F(t) \equiv 0$, $t \in [0, \infty[$, i.e. $a = 0$. Ceci prouve la bijectivité de l'application (5.52).

Enfin si $a = 1$, alors

$$1 \doteqdot \frac{\int_0^\infty e^{-zt}\, dt}{\int_0^\infty e^{-zt}\, dt} = 1,$$

i.e. à l'unité du corps $\mathfrak{M}(S)$ correspond l'unité du corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. ■

Le théorème démontré affirme l'isomorphisme des corps $\mathfrak{M}(S)$ et $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. La structure du corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ est évidente. Ses éléments sont des fonctions de la variable complexe $\bar{a}(z)$. Chacune d'elles est un quotient de fonctions représentables par des intégrales de Laplace absolument convergentes.

Etudions les propriétés de cet isomorphisme.

Propriétés de l'isomorphisme $\mathfrak{M}(S) \doteqdot \overline{\mathfrak{M}}(S)$.

1. *L'image de l'opérateur* $p = \frac{1}{t}$ *par l'isomorphisme* $\mathfrak{M}(S) \doteqdot \overline{\mathfrak{M}}(S)$ *est la fonction* $\bar{a}(z) = z$.

Démonstration. En effet, on a

$$p = \frac{1}{t} \doteqdot \frac{\int_0^\infty e^{-zt}\, dt}{\int_0^\infty t e^{-zt}\, dt} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}} = z;$$

donc,

$$p \doteqdot z. \quad ■ \tag{5.53}$$

2. *Si un opérateur a est réductible à une fonction de S*

$$a = \frac{F(t)}{t} = f(t) \in S, \quad (F(0) = 0),$$

on a

$$f(t) \doteqdot z f^*(z) = \bar{f}(z). \tag{5.54}$$

Démonstration. En effet, en supposant $\operatorname{Re} z > \gamma$, on obtient (cf. (2.20))

$$a = \frac{F(t)}{t} \doteqdot \frac{\int_0^\infty F(t)\, e^{-zt}\, dt}{\int_0^\infty t e^{-zt}\, dt} = z^2 \int_0^\infty F(t)\, d\left(\frac{e^{-zt}}{-z}\right) =$$

$$= -zF(t)\,e^{-zt}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty F'(t)\,e^{-zt}\,dt = z\int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}\,dt. \quad \blacksquare$$

3. *Si* $\frac{F(t)}{G(t)} \doteqdot \frac{F^*(z)}{G^*(z)} = a(z)$ *l'image de l'opérateur* $\frac{F(\alpha t)}{G(\beta t)}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *est le quotient* $\dfrac{\beta F^*\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\alpha G^*\left(\frac{z}{\beta}\right)}$, *i.e.*

$$\frac{F(\alpha t)}{G(\beta t)} \doteqdot \frac{\beta F^*\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\alpha G^*\left(\frac{z}{\beta}\right)}. \tag{5.55}$$

En particulier, on a

$$\frac{F(\alpha t)}{G(\alpha t)} \doteqdot \frac{F^*\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{G^*\left(\frac{z}{\alpha}\right)} = \bar{a}\left(\frac{z}{\alpha}\right). \tag{5.56}$$

D é m o n s t r a t i o n. Faisons le changement de variables $\alpha t = u$, $dt = \frac{1}{\alpha}\,du$ dans l'intégrale $\int_0^\infty F(\alpha t)\,e^{-tz}\,dt$

$$\int_0^\infty F(\alpha t)\,e^{-zt}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty F(u)\,e^{-\frac{zu}{\alpha}}\,du = \frac{1}{\alpha}F^*\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

De façon analogue,

$$\int_0^\infty G(\beta t)\,e^{-zt}\,dt = \frac{1}{\beta}G^*\left(\frac{z}{\beta}\right).$$

On a, donc, $\dfrac{F(\alpha t)}{G(\beta t)} \doteqdot \dfrac{\beta}{\alpha}\,\dfrac{F^*\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{G^*\left(\frac{z}{\beta}\right)}$. $\blacksquare$

4. *La relation* $\frac{F(t)}{G(t)} \doteqdot \frac{F^*(z)}{G^*(z)}$ *entraîne* $\frac{e^{\alpha t}F(t)}{e^{\beta t}G(t)} \doteqdot \frac{F^*(z-\alpha)}{G^*(z-\beta)}$, où α et β sont des nombres quelconques et $e^{\alpha t}F(t)$, $e^{\beta t}G(t)$ *représentent le produit ordinaire de fonctions, et notamment*

$$e^{\alpha t}f(t) \doteqdot \frac{z}{z-\alpha}\,\bar{f}\,(p-\alpha). \tag{5.57}$$

D é m o n s t r a t i o n. On a

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}F(t)\,e^{-zt}\,dt = F^*(z-\alpha) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{\beta t}G(t)\,e^{-zt}\,dt = G^*(z-\beta),$$

d'où résulte (4). ■

5. *Si* $F(t)=0$ *pour* $t<0$ *et* $G(t)=0$ *pour* $t<0$, *et si* $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, *la relatton* $\frac{F(t)}{G(t)} \doteqdot \frac{F^*(z)}{G^*(z)} = a(z)$ *entraîne*

$$\frac{F(t-\alpha)}{G(t-\beta)} \doteqdot \frac{e^{-\alpha z}F^*(z)}{e^{-\beta z}G^*(z)} = e^{-(\alpha-\beta)z}\bar{a}(z). \tag{5.58}$$

D é m o n s t r a t i o n. On a

$$\int_0^\infty F(t-\alpha)\,e^{-zt}\,dt = \int_\alpha^\infty F(t-\alpha)\,e^{-zt}\,dt, \quad t-\alpha=u,$$

donc

$$\int_0^\infty F(t-\alpha)\,e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty F(u)\,e^{-z(\alpha+u)}\,du = e^{-z\alpha}F^*(z)$$

et, de façon analogue,

$$\int_0^\infty G(t-\beta)\,e^{-zt}dt = e^{-z\beta}G^*(z).$$

Pour l'opérateur $\frac{F(t+\alpha)}{G(t+\beta)}$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ on aura

$$\frac{F(t+\alpha)}{G(t+\beta)} = \frac{e^{\alpha z}\left[F^*(z) - \int_0^\alpha F(t)\,e^{-zt}\,dt\right]}{e^{\beta z}\left[G^*(z) - \int_0^\beta G(t)\,e^{-zt}\,dt\right]}. \tag{5.59}$$

En effet,

$$\int_0^\infty F(t+\alpha)\,e^{-zt}\,dt = \int_\alpha^\infty F(u)\,e^{-z(u-\alpha)}\,du = e^{z\alpha}\left(F^*(z) - \int_0^\alpha F(u)\,e^{-zt}\,dt\right).$$

On obtiendrait le même résultat pour l'autre intégrale. ■

6. *La relation* $\frac{F(t)}{G(t)} \doteqdot \frac{F^*(z)}{G^*(z)}$ *entraîne*

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{F^*(z)}{G^*(z)}\right) \doteqdot \frac{-tF(t)}{G(t)} + \frac{F(t)}{G(t)} * \frac{tG(t)}{G(t)}. \tag{5.60}$$

On remarquera que $tF(t)$ ou $tG(t)$ désignent le produit ordinaire de fonctions, donc l'opérateur $\frac{tG(t)}{G(t)}$ ne se ramène pas à $\frac{t}{1}$.

D é m o n s t r a t i o n. On a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{F^*(z)}{G^*(z)}\right)=\frac{\frac{d}{dz}F^*(z)}{G^*(z)}-\frac{F^*(z)}{G^*(z)}\frac{\frac{d}{dz}G^*z}{G^*(z)};$$

or $\frac{d}{dz}F^*(z)=-\int_0^\infty tF(t)e^{-zt}\,dt$ (cf. propriété 7, § 2). Cette propriété entraîne (5.60). En particulier, si l'opérateur $\frac{F(t)}{G(t)}$ se ramène à une fonction (cf. (5.54)) de S, on aura

$$z\frac{d}{dz}\left(\frac{\overline{f}(z)}{z}\right)=-tf(t). \blacksquare \tag{5.61}$$

7. *Supposons que $F(t)$ possède une dérivée $F'(t)=f(t)\in S$. On a*

$$F'(t)\doteqdot z\overline{F}(z)-zF(0). \tag{5.62}$$

D é m o n s t r a t i o n. (5.54) entraîne

$$F'(t)\doteqdot z\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt=z\int_0^\infty e^{-zt}\,dF(t)=-zF(0)+$$

$$+z^2\int_0^\infty F(t)e^{-zt}\,dt=z\overline{F}(z)-zF(0). \blacksquare$$

De façon analogue, on démontrerait la formule plus générale

$$F^{(n)}(t)\doteqdot z^n\overline{F}(z)-z^nF(0)-z^{(n-1)}F'(0)-\ \ldots\ -zF^{(n-1)}(0). \tag{5.63}$$

Les corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ et $\mathfrak{M}(S)$ sont isomorphes. L'image de l'opérateur p par cet isomorphisme est la fonction $\overline{a}(z)=z$. Donc, l'image de tout polynôme de l'opérateur p, en l'occurrence $P(p)=\sum_k a_kp^k$ est un polynôme ordinaire $p(z)=\sum_k a_kz^k$, i.e.

$$P(p)=\sum_k a_kp^k\doteqdot\sum_k a_kz^k=P(z). \tag{5.64}$$

L'image de tout opérateur rationnel $R(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ sera la fraction rationnelle $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, i.e.

$$R(p)\doteqdot R(z). \tag{5.65}$$

La comparaison des formules (5.63) et (5.23) de la dérivée $F^{(n)}(t)$ donne

$$F^{(n)}(t)=p^nF(t)-p^nF(0)-\ \ldots\ -pF^{(n-1)}(0)\doteqdot$$

$$\doteqdot z^nF(t)-z^nF(0)-\ \ldots\ -zF^{(n-1)}(0). \tag{5.66}$$

Soit $a = \frac{F}{G} \in \mathfrak{M}(S)$. Dans ce cas $a \doteqdot \bar{a}(z)$ (cf. (5.51)). Il est donc naturel de noter l'opérateur $a = \bar{a}(p)$. Donc, à toute fonction $\bar{a}(z)$ de la variable complexe z appartenant au corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ est associé l'opérateur $\bar{a}(p)$. C'est précisément à cet opérateur $a \in \mathfrak{M}$ qu'est associé $\bar{a}(z)$ par l'application $\mathfrak{M} \doteqdot \overline{\mathfrak{M}}(S)$. Ainsi dans le corps $\mathfrak{M}$ on a mis en évidence un sous-corps d'opérateurs $\mathfrak{M}(S)$ représentables par des fonctions de l'opérateur p :

$$a = \bar{a}(p) \doteqdot \bar{a}(z). \tag{5.67}$$

Les premiers et seconds membres des formules (5.64), (5.65), (5.66) et (5.67) sont identiques à la différence près que la lettre z figure dans les seconds membres et la lettre p dans les premiers. En fait la lettre p représente l'opérateur $\frac{1}{t}$, la lettre z est une variable complexe, $\bar{a}(p)$ un opérateur, $\bar{a}(z)$ une fonction de la variable complexe z. Mais la distinction entre $\mathfrak{M}(S)$ et $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ n'est pas essentielle dans la plupart des cas par suite de leur isomorphisme. Pour cette raison on peut noter l'opérateur p et la variable complexe z par une même lettre. Dans la suite on écrira p au lieu de z. Dans nombre de cas la représentation de l'opérateur $\frac{1}{t}$ et de la variable complexe z par une même lettre simplifie l'exposé. Ainsi p représente l'opérateur $\frac{1}{t}$ dans le corps $\mathfrak{M}$ et le nombre complexe $\sigma + i\tau$ dans le corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. Donc, tous les opérateurs transformables-Laplace i.e. les éléments du corps $\mathfrak{M}(S)$ peuvent être mis sous la forme

$$a = \bar{a}(p) = \frac{\int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt}{\int_0^\infty e^{-pt} G(t)\, dt}. \tag{5.68}$$

En particulier, toute fonction $f(t) \in S$ (cf. (5.54)) s'écrit

$$f(t) = \bar{f}(p) \tag{5.69}$$

L'expression $f(p)$ est dite image opérationnelle de la fonction $f(t)$. Ici

$$\bar{f}(p) = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{5.70}$$

Exemples. 1. Soit $f(t)=t^{\alpha}$, trouver $\overline{f}(p)=p\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-pt}\,dt$.

Supposant que p est réel et effectuant le changement $pt=u$, $t=\frac{u}{p}$, on obtient

$$\overline{f}(p)=\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{u}{p}\right)^{\alpha}e^{-u}\,du=\frac{1}{p^{\alpha}}\int\limits_0^{\infty}u^{\alpha}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha}}.$$

En vertu du principe de prolongement analytique, la dernière égalité vaut pour complexe, pourvu que $\operatorname{Re} p>0$, donc

$$t^{\alpha}=p^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p^{\alpha}}=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{5.71}$$

Si α est égal à un entier, cette égalité se transforme en (5.18).

2. On donne

$$e(\lambda)=\eta(t;\ \lambda)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<\lambda\\ 1 & \text{si} \quad t\geqslant\lambda.\end{cases}$$

Trouver $p\int\limits_0^{\infty}\eta(t;\ \lambda)\,e^{-pt}\,dt$.

On a visiblement

$$p\int\limits_0^{\infty}\eta(t;\ \lambda)\,e^{-pt}\,dt=p\int\limits_{\lambda}^{\infty}e^{-pt}\,dt=e^{-p\lambda},$$

donc

$$\eta(t;\ \lambda)=e^{-p\lambda}. \tag{5.72}$$

D'où il suit aussitôt

$$\eta(t;\ \lambda)\ast\eta(t;\ \mu)=\eta(t;\ \lambda+\mu).$$

Cette égalité a été démontrée au § 5 (cf. (5.10)) par une autre méthode.

Calculons le produit $e^{-p\lambda}f(t)=e^{-p\lambda}\ast f(t)$, $\lambda\geqslant 0$. A cet effet faisons le produit de convolution des fonctions $e^{-p\lambda}=\eta(t;\ \lambda)$ et $f(t)$. On a

$$\int\limits_0^t\eta(t-u;\ \lambda)\,f(u)\,du=\int\limits_0^t f(t-u)\,\eta(u;\ \lambda)\,du=\begin{cases}0, & \text{si} \quad t<\lambda,\\ \int\limits_0^t f(t-u)\,du, & \text{si} \quad t\geqslant\lambda.\end{cases}$$

On voit que le produit de convolution appartient à l'anneau M. Donc,

$$e^{-p\lambda}f(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\eta(t-u;\ \lambda)\,f(u)\,du=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<\lambda,\\ f(t-\lambda), & \text{si} \quad t\geqslant\lambda\end{cases}$$

et finalement

$$e^{-p\lambda}f(t)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad t<\lambda,\\ f(t-\lambda), & \text{si} \quad t\geqslant\lambda.\end{cases} \tag{5.73}$$

3. Soit $f(t) = \ln t$. Trouver $\overline{f}(p) = p \int\limits_0^\infty \ln t e^{-pt}\, dt$.

Pour calculer cette intégrale, utilisons l'égalité (5.71) qui entraîne

$$\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-pt}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

donc

$$\int\limits_0^\infty \ln t e^{-pt}\, dt = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{p^{1+\alpha}}\right]_{\alpha=0} = \frac{\Gamma'(1)}{p} - \frac{\ln p}{p},$$

ou

$$p \int\limits_0^\infty \ln t e^{-pt}\, dt = -C - \ln p,$$

où $\Gamma'(1) = -C$ est la constante d'Euler; en définitive, on obtient

$$\ln t = -C - \ln p. \tag{5.74}$$

4. Soit $f(t) = \ln^2 t$, trouver $\overline{f}(p)$.
De toute évidence,

$$\int\limits_0^\infty \ln^2 t e^{-pt}\, dt = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{p^{1+\alpha}}\right]_{\alpha=0} = \frac{\Gamma''(1)}{p} - \frac{2\Gamma'(p)\ln(p)}{p} + \frac{\ln^2 p}{p};$$

or $\Gamma'(1) = -C$ et $\Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}$, donc

$$\overline{f}(p) = \frac{\pi^2}{6} + (C + \ln p)^2. \tag{5.75}$$

Si $\alpha = n$ entier, on déduit aisément

$$\frac{t^n}{n!}[\psi(n+1) - \ln t] = \frac{\ln p}{p^n}, \tag{5.76}$$

$$\frac{t^n}{n!}[(\psi(n+1) - \ln t)^2 - \psi'(n+1)] = \frac{\ln^2 p}{p^n}; \tag{5.77}$$

où

$$\psi'(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

5. Montrer que

$$t^n * \ln^2 t = t^n\left[(\ln t - \psi(n+1) - C)^2 + \frac{\pi}{6} - \psi'(n+1)\right]. \tag{5.78}$$

On a

$$t^n * \ln^2(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\xi)\ln^2 \xi\, d\xi.$$

Puisque

$$t^n = \frac{n!}{p^n}, \qquad \ln^2 t = \frac{\pi^2}{6} + (C + \ln p)^2,$$

il vient

$$t^n \ast \ln^2 t = \frac{n!}{p^n}\left(\frac{\pi^2}{6}+(C+\ln p)^2\right) = \frac{n!\,\pi^2}{6p^n}+\frac{C^2 n!}{p^n}+\frac{2n!\,C\ln p}{p^n}+\frac{n!\ln^2 p}{p^n}.$$

En remplaçant les images opérationnelles des fonctions par les originaux (cf. (5.76), (5.77)), on obtient l'égalité (5.78).

6. Démontrer l'identité

$$S_n = -2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2.$$

On a $\frac{1}{k^2}=\int\limits_0^\infty te^{-kt}\,dt$, donc

$$S_n = 2\int\limits_0^\infty [1-(1-e^{-t})^n]\,dt,$$

en faisant $1-e^{-t}=\xi$, on obtient

$$S_n = -2\int\limits_0^1 (1-\xi^n)\ln(1-\xi)\frac{d\xi}{1-\xi} = n\int\limits_0^1 \xi^{n-1}\ln^2(1-\xi)\,d\xi,$$

ou

$$S_n = n\int\limits_0^1 (1-\xi)^{n-1}\ln^2\xi\,d\xi.$$

Si l'on pose

$$f_n(t) = t^n \ast \ln^2 t = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\xi)^n\ln^2\xi\,d\xi,$$

on a, de toute évidence, $f_n(1) = S_n$, donc (cf. (5.78))

$$S_n = (\psi(n+1)+C)^2+\frac{\pi^2}{6}-\psi'(n+1).$$

Comme

$$\psi(n+1) = -C+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad \psi'(n+1) = \frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

on obtient, en définitive,

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

7. Soit

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln\sigma\frac{1}{t}}{\Gamma(1+\sigma)}, & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Montrer que l'image opérationnelle de $\varphi_\sigma(t)$ est telle que

$$\bar{\varphi}_\sigma(p) = p\,\frac{d\bar{\varphi}_{\sigma+1}(p)}{dp}. \tag{5.79}$$

On a

$$\frac{\bar{\varphi}_\sigma(p)}{p}=\frac{1}{\Gamma(1+\sigma)}\int_0^1 \ln^\sigma \frac{1}{t}\, e^{-pt}\, dt= -\frac{1}{\Gamma(2+\sigma)}\int_0^1 te^{-pt}\, d\left(\ln^{\sigma+1}\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2+\sigma)}\int_0^1 \ln^{\sigma+1}\frac{1}{t}\, e^{-pt}\, dt-\frac{p}{\Gamma(2+\sigma)}\int_0^1 te^{-pt}\ln^{\sigma+1}\frac{1}{t}\, dt,$$

ou

$$\frac{\bar{\varphi}_\sigma(p)}{p}=\frac{\bar{\varphi}_{\sigma+1}(p)}{p}+p\frac{d}{dp}\,\frac{\bar{\varphi}_{\sigma+1}(p)}{p},$$

d'où suit la formule (5.79).

8. Soit

$$S_n(\sigma)=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k^\sigma},\qquad \sigma\geqslant 0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Montrer que

$$S_n(\sigma+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k(\sigma)}{k}. \tag{5.80}$$

On a

$$\frac{1}{k^\sigma}=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-kt}\, dt,$$

donc

$$S_n(\sigma)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty [t-(1-e^{-t})^n]\, t^{\sigma-1}\, dt.$$

En posant $1-e^{-t}=\xi$, il vient $dt=\dfrac{d\xi}{1-\xi}$ et

$$S_n(\sigma)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 (1-\xi^n)\ln^{\sigma-1}\left(\frac{1}{1-\xi}\right)\frac{d\xi}{1-\xi},$$

ou

$$S_n(\sigma)=\frac{n}{\Gamma(1+\sigma)}\int_0^1 \xi^{n-1}\ln^\sigma\left(\frac{1}{1-\xi}\right)d\xi,$$

d'où

$$S_n(\sigma)=\frac{n}{\Gamma(1+\sigma)}\int_0^1 (1-\xi)^{n-1}\ln^\sigma\frac{1}{\xi}\, d\xi.$$

Soit la fonction

$$\Phi_n(\sigma,\ t)=\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\xi)^n\,\varphi_\sigma(\xi)\, d\xi, \tag{5.81}$$

où $\varphi_\sigma(\xi)$ est définie dans l'exemple 7.

De toute évidence,

$$S_n(\sigma) = \Phi_n(\sigma, 1). \tag{5.82}$$

De (5.81) il suit

$$\Phi_n(\sigma, t) = \frac{n!}{p^n} \bar{\varphi}_\sigma(p), \tag{5.83}$$

d'où

$$-t\Phi_n(\sigma+1, t) = p \frac{d}{dp} \left[\frac{n!}{p^{n+1}} \bar{\varphi}_{\sigma+1}(p) \right],$$

ou

$$-t\Phi_n(\sigma+1, t) = -\frac{(n+1)!}{p^{n+1}} \bar{\varphi}_{\sigma+1}(p) + \frac{n! \, \bar{\varphi}'_{\sigma+1}(p)}{p^n}.$$

Les relations (5.79) et (5.83) entraînent

$$-t\Phi_n(\sigma+1, t) = -\Phi_{n+1}(\sigma+1, t) + \frac{n! \, \varphi_n(p)}{p^{n+1}},$$

ou

$$\Phi_{n+1}(\sigma+1, t) - t\Phi_n(\sigma+1, t) = \frac{\Phi_{n+1}(\sigma, t)}{n+1}. \tag{5.84}$$

De (5.84) pour $t=1$ et de (5.82) il suit

$$S_{n+1}(\sigma+1) - S_n(\sigma+1) = \frac{S_{n+1}(\sigma)}{n+1},$$

ou

$$S_k(\sigma+1) - S_{k-1}(\sigma+1) = \frac{S_k(\sigma)}{k}.$$

Comme $S_1(\sigma) = 1$, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} [S_k(\sigma+1) - S_{k-1}(\sigma+1)] = \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k(\sigma)}{k},$$

ou

$$S_n(\sigma+1) - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k(\sigma)}{k},$$

ou encore

$$S_n(\sigma+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k(\sigma)}{k}.$$

On remarquera que $S_k(0) = 1$, donc

$$S_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k};$$

d'où

$$S_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

(comparer avec l'exemple 6).

Pour clore ce paragraphe, trouvons l'image opérationnelle d'une fonction périodique $f(t)$. Supposons que $\omega > 0$ est la période, i.e.

$$f(t+n\omega) = f(t), \quad 0 < t < \omega, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt\,;$$

soit n un entier tel que $\omega n \leqslant A < (n+1)\,\omega$. On a dans ce cas

$$\int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{n\omega} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\omega}^{k-\omega} f(t)\, e^{-pt} dt + \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\omega} f(t+(k+1)\,\omega)\, e^{-p(t+(k-1)\,\omega)}\, dt + \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \int_0^{\omega} f(t)\, e^{-pt} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{(k-1)\omega p} \right) dt + \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \frac{1-e^{-n\omega p}}{1-e^{-\omega p}} \int_0^{\omega} f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Posons $\operatorname{Re} p \geqslant \varepsilon > 0$ et $A \to \infty$, donc $n \to \infty$ et l'on a

$$\left| \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt \right| \leqslant \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} |f(t)|\, e^{-\operatorname{Re} p \cdot t}\, dt \leqslant \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} |f(t)|\, e^{-\varepsilon t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\omega} |f(t)|\, e^{-\varepsilon(t+n\omega)}\, dt \leqslant e^{-\varepsilon n\omega} \int_0^{\omega} |f(t)|\, dt.$$

D'où il suit que lorsque $\operatorname{Re} p \geqslant \varepsilon > 0$

$$\lim_{A\to\infty} \int_{n\omega}^A f(t)\, e^{-pt}\, dt = 0.$$

Or lorsque $\operatorname{Re} p \geqslant \varepsilon > 0$ on a $\lim\limits_{A\to\infty} e^{-n\omega p} = 0$, et

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \frac{\int_0^{\omega} f(t)\, e^{-pt}\, dt}{1-e^{-\omega p}}.$$

Donc, la fonction périodique $f(t)$ est transformable-Laplace et son image opérationnelle est

$$\bar{f}(p) = \frac{p \int\limits_0^{\omega} f(t) e^{-pt} \, dt}{1 - e^{-\omega p}} = f(t)$$

Inversement, si l'image opérationnelle d'une fonction $f(t)$ est

$$\bar{f}(p) = \frac{p \int\limits_0^{\omega} f(t) e^{-pt} \, dt}{1 - e^{-\omega p}},$$

alors cette fonction est périodique, de période ω. En effet, la dernière égalité entraîne

$$(1 - e^{-\omega p}) f(t) = p \int\limits_0^{\omega} f(t) e^{-pt} \, dt = \begin{cases} f(t), & \text{si } t < \omega, \\ 0 & \text{si } t > \omega; \end{cases}$$

par ailleurs (cf. (5.73))

$$(1 - e^{-\omega p}) f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t < \omega, \\ f(t) - f(t - \omega), & \text{si } t > \omega. \end{cases}$$

Pour $t > \omega$ on a $f(t) - f(t - \omega) = 0$, ou en remplaçant t par $t + \omega > \omega$ on obtient $f(t + \omega) - f(t) = 0$ pour toutes les valeurs de $t > 0$ en lesquelles $f(t)$ est continue. Donc, la fonction $f(t)$ est périodique et de période ω.

§ 6. Eléments d'analyse opérationnelle

1. Limite d'une suite d'opérateurs. Séries d'opérateurs. Une suite d'opérateurs $a_n \in \mathfrak{M}$ est par définition *convergente* vers un opérateur $a = \frac{F}{G} \in \mathfrak{M}$ si existe des représentants (F_n, G_n) tels que

1) $a_n = \frac{F_n}{G_n}$;

2) les suites $F_n(t)$ et $G_n(t)$ convergent respectivement vers $F(t)$ et $G(t)$ uniformément sur tout intervalle fini $[0, T]$

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t) = F(t) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} G_n(t) = G(t).$$

L'opérateur $a = \frac{F}{G}$ s'appelle *limite de la suite* d'opérateurs a_n et se note

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a. \qquad (6.1)$$

Prouvons que la définition de la limite est indépendante du choix des représentants $(F_n(t), G_n(t))$. En effet, soit

$$a_n = \frac{F_n}{G_n} = \frac{\widetilde{F}_n}{\widetilde{G}_n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(t) = \widetilde{F}(t); \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{G}_n(t) = \widetilde{G}(t) \tag{6.2}$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle fini $[0, T]$. De (6.2) il vient

$$\frac{d}{dt}\int_0^t F_n(t-u)\widetilde{G}_n(u)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t \widetilde{F}_n(t-u)G_n(u)\,du,$$

ou

$$\int_0^t F_n(t-u)\widetilde{G}_n(u)\,du = \int_0^t \widetilde{F}_n(t-u)G_n(u)\,du. \tag{6.3}$$

Lorsque $n\to\infty$, la convergence uniforme sur $[0, t]$ des suites

$$f_n(u) = F_n(t-u)\widetilde{G}_n(u) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}_n(u) = \widetilde{F}_n(t-u)G_n(u)$$

entraîne

$$\int_0^t F(t-u)\widetilde{G}(u)\,du = \int_0^t \widetilde{F}(t-u)G(u)\,du.$$

Comme les fonctions F, $\widetilde{F}$, G, $\widetilde{G}$ appartiennent à M, il vient

$$\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\widetilde{G}(u)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t \widetilde{F}(t-u)G(u)\,du,$$

d'où $a = \frac{F}{G} = \frac{\widetilde{F}}{\widetilde{G}}$, ce qu'il fallait démontrer. Donc, toute suite convergente possède une seule limite.

Si une suite f de fonctions $f_n(t) \in L$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, T]$ vers une fonction $f(t)$, cette suite sera convergente au sens opérationnel défini plus haut. En effet, on a

$$a_n = \frac{F_n(t)}{t}, \quad \text{où} \quad F_n(t) = \int_0^t f_n(u)\,du;$$

$$a = \frac{F(t)}{t}, \quad \text{où} \quad F(t) = \int_0^t f(u)\,du.$$

De toute évidence, la convergence de $F_n(t)$ vers $F(t)$ est uniforme, donc la suite d'opérateurs a_n converge vers l'opérateur a.

La convergence ordinaire en analyse classique est un cas particulier de la convergence au sens opérationnel. On s'en assure sur

des exemples simples. En effet, la suite de fonctions $f_n(t) = \cos nt$ est divergente au sens classique alors qu'elle converge vers zéro au sens opérationnel. La suite

$$a_n = \frac{\frac{\sin nt}{n}}{t} = \cos nt.$$

tend vers zéro, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nt}{n} = 0$ et la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, T]$.

De même la suite de fonctions $n \sin nt$ sera convergente. En effet, on a

$$n \sin nt = \frac{1-\cos nt}{t} = \frac{t - \frac{\sin nt}{n}}{t * t} = a_n,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(t - \frac{\sin nt}{n}\right) = t$ et la convergence est uniforme. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \sin nt = \frac{t}{t * t} = \frac{1}{t} = p.$$

Considérons encore la suite

$$ne^{nt} = \frac{np}{p-n} = \frac{n\cdot\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-n} = \frac{n}{1-nt} = \frac{1}{\frac{1}{n}-t}.$$

R e m a r q u e. Toutes les opérations sont effectuées dans le corps $\mathfrak{M}$. Par exemple, en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction $\frac{n\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-n}$ par $F(t) = t$, on obtient

$$\frac{n\frac{1}{t} * t}{\left(\frac{1}{t}-n\right) * t} = \frac{n}{1-nt}.$$

La suite $G_n(t) = \frac{1}{n} - t$ converge uniformément vers la fonction $G(t) = -t$ lorsque $n \to \infty$. Donc la suite d'opérateurs $a_n = \frac{1}{\frac{1}{n}-t}$ sera convergente. Il est évident que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} ne^{nt} = -\frac{1}{t} = -p.$$

Donc, la suite ne^{nt} converge vers l'opérateur $-p$.

Propriétés fondamentales de la limite d'une suite d'opérateurs

1. *Si une suite d'opérateurs a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ converge vers une limite, chacune de ses suites partielles converge vers la même limite.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G(t)$, $a_n = \frac{F_n}{G_n}$, $a = \frac{F}{G}$. Si a_{n_k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$ est une suite partielle de a_n, les suites partielles correspondantes de fonctions $F_{n_k}(t)$ et $G_{n_k}(t)$ seront, on le sait, convergentes respectivement vers les fonctions $F(t)$ et $G(t)$. La convergence sera uniforme sur tout intervalle $[0, T]$. Donc, $\lim a_{n_k} = a$. ■

2. *Si les suites d'opérateurs a_n et b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ convergent respectivement vers a et b, les suites $a_n + b_n$ et $a_n \ast b_n$ convergent respectivement vers $a + b$ et $a \ast b$, i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \tag{6.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \ast b_n) = a \ast b. \tag{6.5}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $a_n = \frac{F_n}{G_n}$, $b_n = \frac{\widetilde{F}_n}{\widetilde{G}_n}$, $a = \frac{F}{G}$ et $b = \frac{\widetilde{F}}{\widetilde{G}}$. Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t), \ \lim_{n\to\infty} G_n(t) = G(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{F}_n(t) = \widetilde{F}(t) \ \text{et} \ \lim_{n\to\infty} \widetilde{G}_n(t) = \widetilde{G}(t)$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle $[0, T]$. On obtient ainsi l'égalité

$$a_n + b_n = \frac{F_n}{G_n} + \frac{\widetilde{F}_n}{\widetilde{G}_n} = \frac{F_n \ast \widetilde{G}_n + \widetilde{F}_n \ast G_n}{G_n \ast \widetilde{G}_n}.$$

Posons

$$H_n(t) = \int_0^t [F_n(t-u)\,\widetilde{G}_n(u) + \widetilde{F}_n(t-u)\,G_n(u)]\,du,$$

$$R_n(t) = \int_0^t G_n(t-u)\,\widetilde{G}(u)\,du;$$

de toute évidence

$$a_n + b_n = \frac{H_n(t)}{R_n(t)}.$$

La convergence uniforme des suites $F_n(t)$, $G_n(t)$, $\widetilde{F}_n(t)$ et $\widetilde{G}_n(t)$

entraîne la convergence uniforme des suites $H_n(t)$ et $R_n(t)$ et

$$\lim_{n\to\infty} H_n(t) - \int_0^t [F(t-u)\widetilde{G}(u) + \widetilde{F}(t-u)G(u)]\,du = H(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(t) = \int_0^t G(t-u)\widetilde{G}(u)\,du - R(t)$$

On aura donc

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \frac{H(t)}{R(t)} = \frac{\frac{d}{dt}H(t)}{\frac{d}{dt}R(t)} = \frac{F \ast \widetilde{G} + \widetilde{F} \ast G}{G \ast \widetilde{G}} = \frac{F}{G} + \frac{\widetilde{F}}{\widetilde{G}} = a + b.$$

De façon analogue, on obtient pour le produit des opérateurs $a_n \ast b_n$

$$a_n \ast b_n = \frac{F_n \ast \widetilde{F}_n}{G_n \ast \widetilde{G}_n} = \frac{\int_0^t F_n(t-u)\widetilde{F}_n(u)\,du}{\int_0^t G_n(t-u)\widetilde{G}(u)\,du},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ast b_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\int_0^t F_n(t-u)\widetilde{F}_n(u)\,du}{\lim_{n\to\infty}\int_0^t G_n(t-u)\widetilde{G}_n(u)\,du} = \frac{\int_0^t F(t-u)\widetilde{F}(u)\,du}{\int_0^t G(t-u)\widetilde{G}(u)\,du} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t F(t-u)\widetilde{F}(u)\,du}{\frac{d}{dt}\int_0^t G(t-u)\widetilde{G}(u)\,du} = \frac{F \ast \widetilde{F}}{G \ast \widetilde{G}} = a \ast b. \quad \blacksquare$$

3. *L'existence de* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, $b_n \neq 0$ *entraîne celle de*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

D é m o n s t r a t i o n. En effet, si la suite d'opérateurs $b_n = \frac{\widetilde{F}_n}{\widetilde{G}_n}$ converge vers l'opérateur $b = \frac{\widetilde{F}}{G}$ et $b \neq 0$ (donc, $\widetilde{F}(t) \not\equiv 0$) il est évident que la suite d'opérateurs $\frac{1}{b_n} = \frac{\widetilde{G}_n(t)}{\widetilde{F}_n(t)}$ sera convergente et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{\widetilde{G}(t)}{\widetilde{F}(t)} = \frac{1}{b}.$$

La deuxième propriété (cf. (6.5)) entraîne maintenant $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. ■

4. *Si c est un opérateur quelconque et* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *alors* $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$. Ceci découle immédiatement de (6.5).

Le calcul opérationnel étudie également les séries d'opérateurs.

On appelle *série d'opérateurs* l'expression

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_k \in \mathfrak{M}. \tag{6.6}$$

Une série d'opérateurs est donnée si l'on connaît son terme général a_n. La série d'opérateurs (6.6) est *convergente* si existe au sens opérationnel la limite de ses sommes partielles

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

La limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S \tag{6.7}$$

est appelée *somme de la série*. On note

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S. \tag{6.8}$$

Au § 4 on a étudié la fonction $\eta \mid t; \lambda \mid = e^{-p\lambda}$. Son graphe est donné sur la figure 20. On rappelle que

$$e^{-p\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \lambda, \\ 1 & \text{si } t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Considérons la série d'opérateurs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-p\lambda_k}, \tag{6.9}$$

où α_k est une suite arbitraire de nombres et λ_k des nombres réels positifs formant une suite monotone croissante tendant vers l'infini, i.e.

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \ldots \text{ et } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

La série (6.9) sera toujours convergente au sens opérationnel.

Prouvons que la suite de sommes partielles

$$\alpha_0 e^{-\lambda_0 p} + \alpha_1 e^{-\lambda_1 p} + \ldots + \alpha_n e^{-\lambda_n p} = S_n(p)$$

est une suite convergente. On a

$$S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{\eta_1(t; \lambda_k)}{t} = \frac{F_n(t)}{t},$$

où

$$\eta_1(t; \lambda) = \int_0^t \pi(u; \lambda)\, du = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \lambda, \\ t - \lambda, & \text{si } t \geqslant \lambda, \end{cases}$$

et

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_1(t;\ \lambda_k).$$

La suite de fonctions $F_n(t) \in M$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[0, T]$ lorsque $n \to \infty$. En effet, choisissons n_0 tellement grand que $\lambda_{n_0} > T$. Alors de $\eta_1(t;\ \lambda_n) = 0$, $n \geqslant n_0$, pour $0 \leqslant t \leqslant T < \lambda_{n_0}$, il suit que $F_n(t) = F_{n_0}(t)$ pour tous les $n \geqslant n_0$ et $t \in [0, T]$.

Il est aisé de calculer la somme de la série (6.8). Figeons t. Comme $e^{-p\lambda} = 0$ pour $t < \lambda$ et $e^{-p\lambda} = 1$ pour $t \geqslant \lambda$, on trouve sans peine

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-p\lambda_k} = \sum_{\lambda_k \leqslant t} \alpha_k, \tag{6.10}$$

où, au second membre, la sommation est étendue à tous les indices k tel que $\lambda_k \leqslant t$. Par exemple, si $t \in [0, \lambda_1[$, on a $\sum_{\lambda_k \leqslant t} \alpha_k = \alpha_0$. La fonction donnée par la série (6.10) appartient à la classe des fonctions en escalier.

Définition 1. *Une fonction $f(t)$, $t \in [0, \infty[$ est en escalier si la section $]0, \infty[$ peut être partagée en un nombre fini ou dénombrable d'intervalles disjoints à l'intérieur desquels la fonction $f(t)$ reste constante.*

Considérons l'opérateur $e^{-p\lambda} - e^{-p\mu}$, où $0 \leqslant \lambda < \mu < \infty$. De soute évidence,

$$e^{-p\lambda} - e^{-p\mu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, \lambda[; \\ 1 & \text{si} \quad t \in [\lambda, \mu]; \\ 0 & \text{si} \quad \mu \leqslant t. \end{cases} \tag{6.11}$$

Le graphe de cette fonction en escalier est donné sur la figure 24.

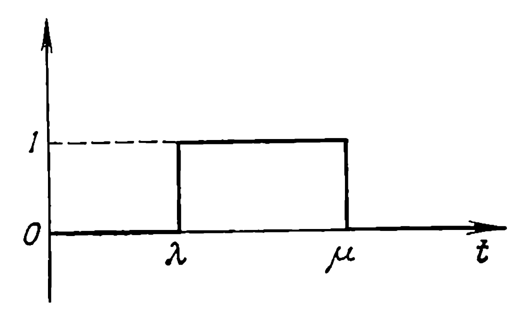


Fig. 24

Soit maintenant $\varphi(t)$ une fonction en escalier quelconque. Pour donner $\varphi(t)$ il faut en indiquer les valeurs sur tous les intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Posons $\varphi(t) = \beta_k$ pour $\lambda_k < t < \lambda_{k+1}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ En se servant de (6.11), on écrit sans peine l'image opérationnelle de $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(e^{-\lambda_{k+1}p} - e^{-\lambda_{k+1}p}\right). \tag{6.12}$$

Donc, l'ensemble des fonctions en escalier s'identifie à celui des séries d'opérateurs de la forme (6.12).

Dans les applications on rencontre souvent des séries dans lesquelles λ_k forment une progression arithmétique $\lambda_k = kh$, $k =$

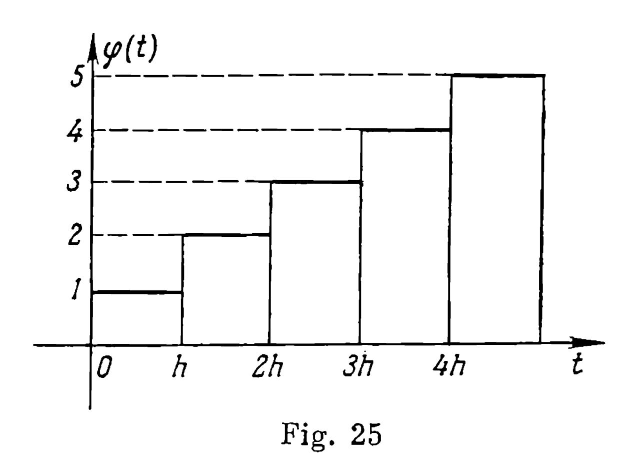


Fig. 25

$= 0, 1, 2, \ldots$. La fonction $\varphi(t)$ s'écrit alors

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(e^{-khp} - e^{-(k+1)hp}\right) = \left(1 - e^{-hp}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-khp};$$

donc

$$\varphi(t) = \left(1 - e^{-hp}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-khp}. \tag{6.13}$$

Exemple: soit la fonction (fig. 25)

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-khp} = \frac{1}{1 - e^{-hp}}.$$

On a

$$\left(1 - e^{-hp}\right) \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-hkp} = \frac{\left(1 - e^{-hp}\right) e^{-hp}}{\left(1 - e^{-hp}\right)^2} = \frac{e^{-hp}}{1 - e^{-hp}},$$

d'où

$$\frac{e^{-hp}}{1 - e^{-hp}} = k \text{ pour } hk \leqslant t < h(k+1).$$

2. Fonctions opérationnelles. Dans le corps $\mathfrak{M}$ on peut envisager des opérateurs dépendant d'un paramètre, appelés *fonctions opéra-*

tionnelles. Nous étudierons ici des opérateurs dépendant d'un paramètre réel. Si un opérateur $a = \frac{F}{G}$ dépend d'un paramètre $\lambda \in [\alpha, \beta]$, on notera $a = a(\lambda)$. La fonction opérationnelle a (λ) est déterminée par son représentant (F, G). Les fonctions F et G dépendent de λ, i.e. dans le cas général $F = F(t; \lambda)$ et $G = G(t; \lambda)$; la fonction $G(t; \lambda)$ n'est identiquement nulle pour aucune valeur de λ.

Exemples:

1) $a(\lambda) = \frac{t^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}$, si $\lambda \in [0, \infty[$;

2) $e(\lambda) = \eta(t; \lambda) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < \lambda; \\ 1 \text{ pour } t \geqslant \lambda, \end{cases}$ $\lambda \in [0, \infty[$;

3) $a(\lambda) = \frac{p}{p-\lambda} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-\lambda} = \frac{\frac{1}{t} * t}{\left(\frac{1}{t}-\lambda\right) * t} = \frac{1}{1-\lambda t} = e^{\lambda t}$, λ est un nombre complexe.

Si a est un opérateur quelconque de $\mathfrak{M}$, on peut toujours exhiber une fonction $Q(t)$ de l'anneau initial M, telle que le produit $a * Q$ appartienne également à cet anneau. Si maintenant $a = a(\lambda)$, dans le cas général la fonction $Q(t)$ dépendra aussi de λ.

Définition 2. *Une fonction opérationnelle a* (λ), $\lambda \in]\alpha, \beta[$ *appartenant au corps* $\mathfrak{M}(M)$ *ou* $\mathfrak{M}(S)$ *est réductible sur l'intervalle* $]\alpha, \beta[$ *si existe une fonction* $Q(t) \in M$ *(resp.* $Q(t) \in S$), $Q(t) \not\equiv 0$ *et* $Q(t)$ *ne dépend pas de* λ, *telle que pour tous les* $\lambda \in]\alpha, \beta[$ *le produit*

$$Q(t) * a(\lambda) = \varphi(t; \lambda) \tag{6.14}$$

appartienne à l'anneau M *(resp.* S).

La somme et le produit de fonctions réductibles sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ sont de nouveau des fonctions réductibles. Montrons cette assertion pour l'anneau M. La démonstration est analogue pour l'anneau S.

Si $a_1(\lambda)$ et $a_2(\lambda)$ sont des fonctions réductibles sur un intervalle, il existe dans M des fonctions $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ telles que

$$Q_1(t) * a_1(\lambda) = \varphi_1(t; \lambda) \in M \text{ et } Q_2(t) * a_2(\lambda) = \\ = \varphi_2(t; \lambda) \in M, \ \lambda \in]\alpha, \beta[;$$

d'où

$$Q_1 * Q_2 * [a_1(\lambda) + a_2(\lambda)] = (Q_2 * \varphi_1) + (Q_1 * \varphi_2) \in M$$

pour tous les $\lambda \in]\alpha, \beta[$. Donc, la somme $a_1(\lambda) + a_2(\lambda)$ est une fonction opérationnelle réductible.

De façon analogue l'égalité

$$Q_1 * Q_2(a_1(\lambda) * a_2(\lambda)) = (Q * \varphi_1) * (Q_1 * \varphi_2) \in M$$

entraîne que le produit de deux fonctions réductibles est une fonction réductible.

Mais si $a(\lambda)$ est une fonction réductible, $\frac{1}{a(\lambda)}$ ne l'est pas forcément. En effet, soit la fonction opérationnelle

$$e(\lambda) = \eta(t\,;\,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \lambda, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

De toute évidence, $e(\lambda)$ est une fonction réductible sur la section $\lambda \in [0, \infty[$, plus exactement

$$t \times e(\lambda) = \eta_1(t\,;\,\lambda) = \int_0^t e(\lambda)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \lambda, \\ t-\lambda & \text{si} \quad t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Donc, $Q(t) = t$, et manifestement $e(\lambda) = \frac{\eta_1(t\,;\,\lambda)}{t}$.

La fonction inverse $\frac{1}{e(\lambda)} = \frac{t}{\eta_1(t\,;\,\lambda)}$ ne sera pas réductible pour $\lambda \in [0, \infty[$. En effet, si elle était réductible, il existerait une fonction $Q(t) \in M$, $Q(t) \not\equiv 0$ telle que

$$Q(t) \times \frac{1}{e(\lambda)} = \varphi(t\,;\,\lambda) \in M, \quad \lambda \in [0, \infty[,$$

ou

$$Q(t) = e(\lambda) \times \varphi(t\,;\,\lambda) = \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t \eta_1(t-u\,;\,\lambda)\,\varphi(u\,;\,\lambda)\,du}{t},$$

ou

$$Q(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \eta(t-u\,;\,\lambda)\,\varphi(u\,;\,\lambda)\,du, \lambda \in [0, \infty[.$$

Figeons t ($t = t_0$) et supposons que $\lambda > t_0$. On a alors

$$Q(t_0) = \frac{d}{dt}\int_0^{t_0} \eta(t_0-u;\,\lambda)\,\varphi(u;\,\lambda)\,du = 0.$$

Donc, $Q(t) = 0$ pour tous les $t \geqslant 0$. Il n'existe donc pas de fonction $Q(t) \in M$ non nulle et telle que $Q(t)\,\frac{1}{e(\lambda)} \in M$, et $\frac{1}{e(\lambda)}$ n'est pas réductible sur la section $]0, \infty[$. Les opérations et notions fondamentales d'analyse se généralisent facilement aux fonctions opérationnelles réductibles, en vertu de la règle générale suivante.

Une fonction opérationnelle réductible $a(\lambda)$ est *continue dans l'intervalle* $]\alpha, \beta[$ si existe une fonction $Q(t) \in M$ telle que $\varphi(t\,;\,\lambda) = Q(t) \times a(\lambda)$ est une fonction continue de deux variables t et λ dans la section $]0, \infty[$, $\lambda \in]\alpha, \beta[$.

On se sert de la notion de limite d'une suite d'opérateurs pour introduire celle d'une fonction opérationnelle.

Définition 3. *Une fonction opérationnelle* $a(\lambda)$ *possède une limite au point* $\lambda = \lambda_0$ *si pour toute suite* λ_n *convergente vers* λ_0 *existe* $\lim_{n\to\infty} a(\lambda_n)$ *indépendamment du choix de la suite* λ_n*. On note*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda) = b.$$

Corollaire. *Si une fonction opérationnelle* $a(\lambda)$ *est continue sur un intervalle* $]\alpha, \beta[$*, pour tout* $\lambda_0 \in]\alpha, \beta[$ *existe*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda) = a(\lambda_0).$$

Ce corollaire découle immédiatement de la définition d'une fonction opérationnelle réductible continue.

Une fonction opérationnelle réductible $a(\lambda)$ est par définition *continûment dérivable* sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ si la fonction $\varphi(t; \lambda)$ est dérivable par rapport à λ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \in M$ est une fonction continue en t et λ dans les domaines $t \geqslant 0$, $\lambda \in]\alpha, \beta[$. L'opérateur $\frac{1}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ s'appelle *dérivée continue* de $a(\lambda)$ et se note $a'(\lambda)$ ou $\frac{\partial a(\lambda)}{\partial\lambda}$; donc,

$$a'(\lambda) = \frac{da(\lambda)}{d(\lambda)} = \frac{1}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{1}{Q}\frac{\partial}{\partial\lambda}(Q * a(\lambda)). \tag{6.15}$$

Prouvons que la définition de la dérivée est indépendante du choix de $Q(t)$. En effet, si $\varphi_1(t; \lambda) = Q_1(t) * a(\lambda)$, il est évident que

$$Q * \varphi_1 = Q_1 * \varphi,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\int_0^t Q(t-u)\,\varphi_1(u\,;\lambda)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t Q_1(t-u)\,\varphi(u\,;\lambda)\,du.$$

Comme $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ sont continues en t et λ, il vient

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t Q(t-u)\,\varphi_1(u\,;\lambda)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t Q(t-u)\,\frac{\partial\varphi_1(u\,;\lambda)}{\partial\lambda}\,du,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t Q_1(t-u)\,\varphi(u\,;\lambda)\,du = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t Q_1(t-u)\,\frac{\partial\varphi(u\,;\lambda)}{\partial\lambda}\,du.$$

On a donc

$$Q * \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} = Q_1 * \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \quad \frac{1}{Q_1} * \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{1}{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$

Et la définition de la dérivée est indépendante du choix de la fonction Q. La dérivée d'une fonction opérationnelle réductible possède les propriétés de la dérivée ordinaire.

Propriétés de la dérivée continue d'une fonction opérationnelle

1. *Si des fonctions opérationnelles $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ possèdent sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ des dérivées continues, leur somme et leur produit possèdent sur cet intervalle des dérivées continues telles que*

$$[a(\lambda) + b(\lambda)]' = a'(\lambda) + b'(\lambda), \tag{6.16}$$

$$[a(\lambda) * b(\lambda)]' = a'(\lambda) * b(\lambda) + a(\lambda) * b'(\lambda). \tag{6.17}$$

En effet, par hypothèse, il existe des fonctions $Q_1(t) \in M$ et $Q_2(t) \in M$ telles que

$$Q_1(t) * a(\lambda) = \varphi_1(t;\ \lambda) \in M,\ Q_2(t) * b(t) = \varphi_2(t;\ \lambda) \in M,$$

et existent les dérivées $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}$. En multipliant les égalités précédentes respectivement par Q_2 et Q_1 et posant $Q = Q_1(t) * Q_2(t)$, on aura

$$Q * a(\lambda) = Q_2(t) * \varphi_1(t\ ;\ \lambda) = \Psi_1(t\ ;\ \lambda) \in M,$$

$$Q * b(\lambda) = Q_1(t) * \varphi_2(t\ ;\ \lambda) = \Psi_2(t\ ;\ \lambda) \in M.$$

Par hypothèse, existent les dérivées $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}$ appartenant à M et continues en t et λ; $t \in [0, \infty[$, $\lambda \in]\alpha, \beta[$, donc les fonctions $\Psi_1(t; \lambda)$ et $\Psi_2(t; \lambda)$ possèdent aussi des dérivées $\frac{\partial\Psi_1}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial\Psi_2}{\partial\lambda}$ continues pour $t \in [0, \infty[$, $\lambda \in]\alpha, \beta[$ et telles que

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\lambda} = Q_2(t) * \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial\lambda} = Q_1(t) * \frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}.$$

On a ainsi

$$Q * (a(\lambda) + b(\lambda)) = \Psi_1(t\ ;\ \lambda) + \Psi_2(t\ ;\ \lambda) = \Psi(t\ ;\ \lambda) \in M$$

et

$$[a(\lambda) + b(\lambda)]' = \frac{1}{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial\Psi_1}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial\lambda}\right] =$$

$$= \frac{1}{Q}\left[Q_2 * \frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} + Q_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda}\right] = \frac{1}{Q_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda} + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\lambda} = a'(\lambda) + b'(\lambda).$$

Pour prouver (6.17), formons le produit

$$Q * Q * [a(\lambda) * b(\lambda)] = \Psi_1(t\ ;\ \lambda) * \Psi_2(t\ ;\ \lambda).$$

Posons $Q * Q = Q^2$; il vient

$$[a(\lambda) * b(\lambda)]' = \frac{1}{Q^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} [\Psi_1 * \Psi_2] =$$

$$= \frac{1}{Q^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^t \Psi_1(t-u\,;\ \lambda)\, \Psi_2(u\,;\ \lambda)\, du =$$

$$= \frac{1}{Q_2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\partial \Psi_1(t-u\,;\lambda)}{\partial \lambda} \Psi_2(u\,;\lambda)\, du +$$

$$+ \frac{1}{Q^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \Psi_1(t-u,\ \lambda) \frac{\partial \Psi_2(u\,;\lambda)}{\partial \lambda} du = \frac{1}{Q^2} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial \lambda} * \Psi_2 + \right.$$

$$\left. + \Psi_1 * \frac{\partial \Psi_2}{\partial \lambda} \right] = \frac{1}{Q^2} \left[Q_1 * \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} * Q_2 * \varphi_2 + \right.$$

$$\left. + Q_1 * \varphi_1 * Q_2 * \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \right] = \frac{1}{Q_1} * \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} * \frac{1}{Q_2} * \varphi_2 +$$

$$+ \frac{1}{Q_1} * \varphi_1 + \frac{1}{Q_2} * \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} = a'(\lambda) * b(\lambda) + a(\lambda) * b'(\lambda). \quad \blacksquare$$

2. *Si une fonction opérationnelle réductible* $a(\lambda)$ *est constante sur un intervalle* $]\alpha, \beta[$, *i.e à toute valeur* $\lambda \in]\alpha, \beta[$ *est associé le même opérateur* a, *alors* $a'(\lambda) = 0$. *Inversement, si* $a'(\lambda) = 0$ *pour tous les* $\lambda \in]\alpha, \beta[$ *la fonction opérationnelle* $a(\lambda)$ *est constante sur l'intervalle* $]\alpha, \beta[$.

En effet, si $a(\lambda)$ est constante sur $]\alpha, \beta[$ on aura $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$. Donc, $a'(\lambda) = 0$ et, inversement, si $a'(\lambda) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$, $\lambda \in]\alpha, \beta[$, donc φ ne dépend pas de λ. L'égalité $a(\lambda) = \frac{1}{Q} \varphi$ entraîne que $a(\lambda)$ est constante sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$. ■

3. *Si* c *est un opérateur quelconque ne dépendant pas de* λ *et* $a(\lambda)$ *une fonction opérationnelle possédant une dérivée continue dans l'intervalle* $]\alpha, \beta[$, *alors* $[c * (\lambda)]' = c * a'(\lambda)$.

Cette propriété découle des propriétés 1 et 2.

4. *Si les fonctions opérationnelles* $a(\lambda)$ *et* $\frac{1}{a(\lambda)}$ *possèdent des dérivées continues, alors*

$$\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)' = -\frac{a'(\lambda)}{a^2(\lambda)},$$

où $a^2(\lambda) = a(\lambda) * a(\lambda)$.

En effet, une dérivation de l'identité $1 = \frac{1}{a(\lambda)} \ast a(\lambda)$ par rapport à λ et la propriété 1 donnent

$$0 = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)' a(\lambda) + \frac{1}{a(\lambda)} \ast a'(\lambda),$$

ou

$$\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right)' = -\frac{a'(\lambda)}{a(\lambda) \ast a(\lambda)}. \quad \blacksquare$$

5. *Si des fonctions opérationnelles* $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ *et* $\frac{1}{b(\lambda)}$ *possèdent sur un intervalle* $]\alpha, \beta[$ *des dérivées continues, alors*

$$\left(\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}\right)' = \frac{a'(\lambda)\, b(\lambda) - a(\lambda)\, b'(\lambda)}{b(\lambda) \ast b(\lambda)}. \tag{6.18}$$

En effet, les propriétés 1 et 4 impliquent

$$\left(\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}\right)' = a'(\lambda) \frac{1}{b(\lambda)} + a(\lambda) \left(\frac{1}{b(\lambda)}\right)' =$$

$$= \frac{a'(\lambda)}{b(\lambda)} - \frac{a(\lambda)\, b'(\lambda)}{b^2(\lambda)} = \frac{a'(\lambda)\, b(\lambda) - a(\lambda)\, b'(\lambda)}{b^2(\lambda)}. \quad \blacksquare$$

6. *Si une fonction opérationnelle* $f(\lambda)$ *possède une dérivée continue* $f'(\lambda)$ *sur un intervalle* $]\alpha, \beta[$, *et* $\varphi(\lambda)$ *est une fonction numérique continûment dérivable définie sur* $]\mu, \nu[$ *et prenant ses valeurs dans l'intervalle* $]\alpha, \beta[$, *alors la fonction composée* $F(\lambda) = f[\varphi(\lambda)]$ *possède une dérivée continue et*

$$F'(\lambda) = f'[\varphi(\lambda)]\, \varphi'(\lambda).$$

Il existe en effet une fonction $Q(t) \in M$ telle que $g(\lambda; t) = Q(t) \ast f(\lambda)$ possède une dérivée $\frac{\partial g}{\partial \lambda}$. De toute évidence,

$$g[\varphi(\lambda); t] = Q(t) \ast f[\varphi(\lambda)] = Q(t) \ast F(\lambda),$$

donc

$$F'(\lambda) = \frac{1}{Q} \frac{\partial g[\varphi(\lambda); t]}{\partial \lambda} = \frac{1}{Q} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \varphi'(\lambda) = f'[\varphi(\lambda)]\, \varphi'(\lambda). \quad \blacksquare$$

Les dérivées continues d'ordre supérieur se déterminent comme d'habitude :

$$f''(\lambda) = [f'(\lambda)]', \qquad f^{(n)}(\lambda) = [f^{(n-1)}(\lambda)]',$$

on suppose que les seconds membres ont un sens.

L'intégrale définie de fonctions opérationnelles réductibles continues peut être introduite de la même façon que la dérivée. *Il existe toujours dans l'anneau* M *une fonction* $Q(t)$ telle que $\int_\alpha^\beta Q \ast a(\lambda)\, d\lambda = \Phi(t) \in M$; l'intégrale $\int_\alpha^\beta a(\lambda)\, d\lambda$ *est par définition l'opérateur* $\frac{\Phi(t)}{Q(t)}$, i.e. $\int_\alpha^\beta a(\lambda)\, d\lambda = \frac{\Phi(t)}{Q(t)}$.

Cette définition est correcte. L'intégrale $\int_\alpha^\beta a(\lambda)\,d\lambda$ est indépendante du choix de la fonction $Q(t)$. En effet, si $P(t)$ est un opérateur tel que

$$\int_\alpha^\beta P(t) * a(\lambda)\,d\lambda = \int_\alpha^\beta \Psi(t;\lambda)\,d\lambda = \Psi(t),$$

alors

$$\frac{\Psi(t)}{P(t)} = \frac{\Phi(t)}{Q(t)}.$$

En effet, en posant

$$Q * a(\lambda) = \varphi(t;\lambda) \quad \text{et } P * a(\lambda) = \Psi(t;\lambda),$$

on obtient

$$Q(t) * \Psi(t;\lambda) = P(t) * \varphi(t;\lambda),$$

ou

$$\frac{d}{dt}\int_0^t Q(t-u)\,\Psi(u;\lambda)\,du = \frac{d}{dt}\int_0^t P(t-u)\,\varphi(u;\lambda)\,du,$$

d'où

$$\int_0^t Q(t-u)\,\Psi(u;\lambda)\,du = \int_0^t P(t-u)\,\varphi(u;\lambda)\,du.$$

Intégrant sur λ entre α et β, on obtient

$$\int_\alpha^\beta d\lambda \int_0^t Q(t-u)\,\Psi(u;\lambda)\,du = \int_\alpha^\beta d\lambda \int_0^t P(t-u)\,\varphi(u;\lambda)\,du.$$

Intervertissant l'ordre d'intégration

$$\int_0^t Q(t-u)\,du \int_\alpha^\beta \Psi(u;\lambda)\,d\lambda = \int_0^t P(t-u)\,du \int_\alpha^\beta \varphi(u;\lambda)\,d\lambda,$$

ou

$$\int_0^t Q(t-u)\,\Psi(u)\,du = \int_0^t P(t-u)\,\Phi(u)\,du,$$

donc

$$Q * \Psi = P * \Phi. \ \blacksquare$$

Au passage nous avons démontré l'égalité

$$\int_\alpha^\beta Q(t) * \Psi(t;\lambda)\,d\lambda = Q(t) * \int_\alpha^\beta \Psi(t;\lambda)\,d\lambda. \tag{6.19}$$

L'intégrale de la fonction opérationnelle possède toutes les propriétés d'une intégrale ordinaire, savoir

$$\int_{\alpha}^{\alpha} a(\lambda)\, d\lambda = 0,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} c * a(\lambda)\, d\lambda = c * \int_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\, d\lambda$$

(c est un opérateur quelconque ne dépendant pas du paramètre λ);

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\, d\lambda = -\int_{\beta}^{\alpha} a(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\, d\lambda + \int_{\beta}^{\gamma} a(\lambda)\, d\lambda = \int_{\alpha}^{\gamma} a(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [a(\lambda) + b(\lambda)]\, d\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} a(\lambda)\, d\lambda + \int_{\alpha}^{\beta} b(\lambda)\, d\lambda.$$

Si des fonctions opérationnelles possèdent des dérivées continues, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} a'(\lambda) * b(\lambda)\, d\lambda = a(\beta) * b(\beta) - a(\alpha) * b(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} \alpha(\lambda) * b'(\lambda)\, d\lambda.$$

Si une fonction numérique $\varphi(\lambda)$, définie sur l'intervalle $]\mu, \nu[$, prend ses valeurs dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$, $\varphi(\mu) = \alpha$, $\varphi(\nu) = \beta$ et possède une dérivée continue $\varphi'(\lambda)$, alors

$$\int_{\mu}^{\nu} f[\varphi(\lambda)]\, \varphi'(\lambda)\, d\lambda = \int_{\varphi(\mu)}^{\varphi(\nu)} b(\lambda)\, d\lambda.$$

De façon analogue, on peut généraliser aux intégrales de fonctions opérationnelles les autres notions de la théorie de l'intégrale définie. En particulier, la définition de l'intégrale impropre $\int_{0}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda$, comme la limite, lorsque $n \to \infty$, de la suite d'opérateurs $\int_{0}^{A_n} f(\lambda)\, d\lambda$ ne dépendant pas du choix de la suite de nombre $A_n \to \infty$.

Soit la fonction $e(\lambda) = \eta(t; \lambda)$. Calculons sa dérivée $e'(\lambda)$. On a

$$t^2 * e(\lambda) = \eta_2(t; \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \lambda, \\ \frac{(t-\alpha)^2}{2} & \text{si} \quad t \geqslant \lambda, \end{cases}$$

donc

$$\frac{d\eta_2(t;\ \lambda)}{d\lambda} = -\eta_1(t;\ \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < \lambda, \\ -(t-\lambda) & \text{pour} \quad t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

où $\eta_1(t;\lambda) = \int\limits_0^t \eta(u;\ \lambda)\,du$ et, par conséquent,

$$\frac{de(\lambda)}{\partial\lambda} = e'(\lambda) = -\frac{\eta_1(t;\ \lambda)}{t^2} = -\frac{1}{t}\,\frac{\eta_1(t;\ \lambda)}{t},$$

or $\frac{1}{t} = p$ et $\frac{\eta_1(t;\ \lambda)}{t} = \eta(t;\ \lambda) = e(\lambda)$, donc

$$e'(\lambda) = -pe(\lambda). \tag{6.20}$$

D'autre part, on a montré (cf. (5.10)) que

$$e(\lambda) * e(\mu) = e(\lambda + \mu). \tag{6.21}$$

Jusqu'ici la fonction opérationnelle $e(\lambda)$ était définie pour $\lambda \geqslant 0$. Définissons maintenant $e(\lambda)$ pour $\lambda < 0$ en posant

$$e(-\lambda) = \frac{1}{e(\lambda)}, \quad \lambda > 0.$$

Montrons que dans ce cas l'égalité (6.21) est réalisée pour tous les λ et μ réels.

En effet, pour $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, on a

$$e(\lambda)\,e(\mu) = \frac{1}{e(-\lambda)} * \frac{1}{e(-\mu)} = \frac{1}{e(-\lambda) * e(-\mu)} =$$
$$= \frac{1}{e(-\lambda-\mu)} = e(\lambda+\mu).$$

Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, on distinguera deux cas. 1) $\lambda + \mu \geqslant 0$, il vient (cf. (5.10))

$$e(\lambda)\,e(\mu) = \frac{e(\lambda)}{e(-\mu)} = \frac{\eta(t;\ \lambda)}{\eta(t;\ -\mu)} = \frac{\eta(t;\ \lambda+\mu)}{1} = e(\lambda+\mu).$$

2) $\lambda+\mu<0$, on a

$$e(\lambda)\,e(\mu) = \frac{\eta(t;\ \lambda)}{\eta(t;\ -\mu)} = \frac{1}{\eta(t;\ -\lambda-\mu)} = e(\lambda+\mu).$$

Donc, l'égalité (6.21) est valable pour tous les λ et μ réels. La fonction $\frac{1}{e(\lambda)}$ n'est pas réductible, par conséquent, l'égalité (6.20) n'a pas de sens pour $\lambda < 0$. Mais on peut définir formellement la dérivée de $\frac{1}{e(\lambda)}$, $\lambda > 0$, en posant $\left(\frac{1}{e(\lambda)}\right)' = -\frac{e'(\lambda)}{e(\lambda) * e(\lambda)}$. Dans ce cas (6.20) entraîne

$$\left(\frac{1}{e(\lambda)}\right)' = \frac{pe(\lambda)}{e(\lambda) * e(\lambda)} = p\,\frac{1}{e(\lambda)}. \tag{6.22}$$

Les propriétés de $e(\lambda)$ avec $\lambda < 0$ énumérées ici suggèrent la notation

$$e(\lambda) = e^{-\lambda p} \tag{6.23}$$

pour tous les λ réels.

Au § 5 on a montré (cf. (5.73)) que

$$e^{-p\lambda} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \lambda; \\ f(t-\lambda) & \text{si } t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Pour $\lambda < 0$ en général $e^{-p\lambda} f(t)$ est un opérateur. Au lieu de $e^{-p\lambda} f(t)$ avec $\lambda < 0$ il est plus commode de considérer $e^{p\lambda} f(t)$ avec $\lambda > 0$. Pour que l'expression $e^{p\lambda} f(t)$ soit réductible à une fonction, il est nécessaire et suffisant que $f(t)$ soit nulle sur l'intervalle $[0, \lambda]$. Plus exactement, $\int_0^t f(u)\,du = 0$ pour tous les $t \in [0, \lambda]$. En effet, si $e^{p\lambda} f(t) = \varphi(t)$ est une fonction, alors $f(t) = e^{-p\lambda}\varphi(t)$ et $f(t) = 0$ (cf. (5.73)) pour $t \in [0, \lambda[$. Inversement, si $f(t) = 0$ pour $t \in [0, \lambda[$, alors

$$e^{-p\lambda} f(t+\lambda) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{si } t \in [0, \lambda[\\ f(t) & \text{si } t \geqslant \lambda \end{matrix} \right\} = f(t) \tag{6.24}$$

pour tous les $t \geqslant 0$. Donc, $e^{p\lambda} f(t) = f(t+\lambda)$ est une fonction et

$$e^{p\lambda} f(t) = f(t+\lambda) \tag{6.25}$$

pourvu que

$$\int_0^t f(u)\,du = 0 \text{ pour tous les } t \in [0, \lambda].$$

Soit $f(t) \in L$. L'expression $a(\lambda) = e^{-p\lambda} f(\lambda)$ est visiblement une fonction opérationnelle. Calculons l'intégrale $\int_0^A e^{-\lambda p} f(\lambda)\,d\lambda$. Comme

$$t * a(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \lambda \\ (t-\lambda) f(\lambda) & \text{si } t \geqslant \lambda, \end{cases}$$

la fonction $t * a(\lambda) = \varphi(t; \lambda)$ appartient à l'anneau M pour tous les $\lambda \geqslant 0$. La définition de l'intégrale d'une fonction opérationnelle

entraîne

$$\int_0^A e^{-\lambda p} f(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{t} * \int_0^A \varphi(t;\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \begin{cases} p\int_0^t (t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda & \text{si } t\in]0, A[, \\ p\int_0^A (t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda & \text{si } t > A, \end{cases}$$

ou

$$\int_0^A e^{-\lambda p} f(\lambda)\, d\lambda = \int_0^t f(\lambda)\, d\lambda \quad \text{si } t\in]0, A[.$$

On a donc

$$p\int_0^A e^{-p\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = f(t) \quad \text{si } t\in]0, A[,$$

Supposons maintenant que

$$A_1 < A_2 < A_3 < \ldots < A_n < A_{n+1} < \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty \quad \text{et} \quad a_n = p\int_0^{A_n} e^{-\lambda p} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Montrons que la suite a_n est convergente lorsque $n \to \infty$. En effet, soit $]0, T[$ un intervalle quelconque fixe et n_0 tel que $A_{n_0} > T$. Pour tous les $n > n_0$ on a alors

$$\frac{a_n}{p} = t * a_n = \int_0^t f(\lambda)\, d\lambda, \quad t\in]0, T[,$$

d'où résultent la convergence et l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f(t).$$

On constate que la limite ne dépend pas du choix de la suite $A_1 < < A_2 < \ldots < A_n \ldots$ Donc, existe l'intégrale impropre

$$p\int_0^\infty e^{-p\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = f(t). \tag{6.26}$$

On a mentionné plus haut (cf. § 5 pt. 2) que l'opérateur est une extension de la notion de fonction. Pour cette raison, dans certains cas, il est commode de conserver la notation $a = a(t)$ pour les opérateurs même si, désormais, la notion de valeur d'un opérateur en un point de la section $[0, \infty[$ n'a plus de sens. Par exemple,

l'écriture a (0) ou, plus généralement, $a(t_0)$, où t_0 est un nombre, n'a pas de sens. Cette écriture conventionnelle est souvent utilisée pour l'opérateur p :

$$p = \delta(t). \tag{6.27}$$

Dans ce cas, compte tenu de (5.73), l'opérateur $pe^{-\lambda p}$ peut être représenté par

$$pe^{-\lambda p} = \delta(t - \lambda). \tag{6.28}$$

L'égalité (6.26) s'écrit alors

$$\int_0^\infty \delta(t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = f(t). \tag{6.29}$$

L'opérateur $\delta(t)$ est appelé *fonction impulsionnelle* ou δ-fonction de Dirac. On peut définir formellement la dérivée $\delta'(t)$ de la fonction impulsionnelle en posant $\delta'(t) = p^2$. On introduit de même formellement les dérivées $\delta^{(n)}(t)$ de tout ordre. Ainsi, la dérivée d'ordre n de la fonction $\delta(t)$ est l'opérateur

$$p^{n+1} = \delta^{(n)} t. \tag{6.30}$$

Cherchons l'opérateur

$$p^{n+1} e^{-\lambda p} = \delta^{(n)}(t-\lambda). \tag{6.31}$$

Calculons $\int_0^\infty f(\lambda)\, \delta^{(n)}(t-\lambda)\, d\lambda$. De toute évidence,

$$\int_0^\infty \delta^{(n)}(t-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = p^{n+1} \int_0^\infty e^{-p\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = p^{n+1} \int_0^t f(\lambda)\, d\lambda,$$

ou

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, \delta^{(n)}(t-\lambda)\, d\lambda = p^n f(t),\ f(t) \in L. \tag{6.32}$$

Si $f(t)$ est n fois dérivable et $f^{(n)}(t) \in L$, de (5.66) il suit

$$p^n f(t) = f^{(n)}(t) + p^n f(0) + p^{n-1} f'(0) + \ldots + p f^{(n-1)}(0),$$

ou

$$p^n f(t) = f^{(n)}(t) + \delta^{(n-1)}(t) f(0) + \delta^{(n-2)}(t) f'(0) + \ldots + \delta(t) f^{(n-1)}(0)\,; \tag{6.33}$$

ainsi donc, si $f^{(n)}(t) \in L$, alors

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, \delta^{(n)}(t-\lambda)\, d\lambda = f^{(n)}(t) + \delta^{(n-1)}(t) f(0) + \ldots + \delta(t) f^{(n-1)}(0). \tag{6.34}$$

En particulier, si $f(0)=0$, $f'(0)=0$, ..., $f^{(n-1)}(0)=0$, alors

$$\int_0^\infty f(\lambda)\,\delta^{(n)}(t-\lambda)\,d\lambda = f^{(n)}(t). \tag{6.35}$$

§ 7. Opérateurs réductibles à des fonctions

1. Opérateurs réguliers. Un opérateur $a \in \mathfrak{M}$ est par définition *régulier* s'il est associé dans le corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ à une fonction $\bar{a}(p)$ régulière au voisinage d'un point à l'infini. Les opérateurs réguliers forment une classe très vaste et très importante pour les applications. De toute évidence, la somme et le produit de deux opérateurs réguliers sont des opérateurs réguliers. Un opérateur régulier est toujours réductible à une fonction. Ceci découle du théorème suivant.

Théorème 1. *Soit $\bar{a}(p)$ un opérateur régulier, i.e. au voisinage du point à l'infini $|p| > R$ on a $\bar{a}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$* ; alors

$$\bar{a}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!} = a(t). \tag{7.1}$$

La série entière converge sur tout intervalle $[0, A]$, *i.e. le rayon de convergence est infini.*

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$ est représentable par une intégrale de Laplace (cf. § 2, théorème 2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{-zt}\,dt,$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!}$$

la série converge pour tous les t, d'où, en multipliant par $\frac{1}{p}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!};$$

par conséquent,

$$a = \bar{a}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k!}. \quad \blacksquare$$

Théorème 2. *Si la somme*

$$\sum_0^\infty \overline{F}_n(p) = \overline{F}(p), \tag{7.2}$$

où $\overline{F}_n(p)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *est une suite d'opérateurs réguliers, est uniformément convergente vers* $F(t)$ *dans le domaine* $|p| > R$, *alors* $\overline{F}(p)$ *est un opérateur régulier et*

$$\overline{F}(p) = \sum_0^\infty F_n(t), \tag{7.3}$$

où

$$F_n(t) = \overline{F}(p).$$

La série (7.3) *est uniformément convergente sur tout intervalle* $[0, A]$.

D é m o n s t r a t i o n. Toute fonction $\overline{F}_n(p)$ est régulière dans le domaine $|p| > R$. La convergence uniforme entraîne que la fonction $F(p)$ est régulière dans le domaine $|p| > R$. Si C_{R_1} est un cercle centré en $p = 0$, on sait que

$$\frac{t^k}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{e^{pt}\, dp}{p^{k+1}}$$

En remplaçant $\frac{t^k}{k!}$ par $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{R_1}} \frac{e^{pt}\, dp}{p^{k+1}}$ dans l'égalité (7.1) et en supposant que le rayon R_1 de C_{R_1} est plus grand que R, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{\overline{a}(p)}{p} e^{pt}\, dp = a(t). \tag{7.4}$$

Appliquant cette formule à $\overline{F}_n(p)$, on obtient

$$F_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{\overline{F}_n(p)}{p} e^{pt}\, dp \tag{7.5}$$

et en vertu de la convergence uniforme de la série (7.2)

$$\sum_0^\infty F_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \sum_0^\infty \frac{\overline{F}_n(p)}{p} e^{pt}\, dp,$$

ou

$$\sum_0^\infty F_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{\overline{F}(p)}{p} e^{pt}\, dp = F(t).$$

Reste à démontrer la convergence uniforme de la série (7.3) sur l'intervalle $[0, A]$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe alors un N tel que

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty} \overline{F}_n(p)\right| < \varepsilon e^{-R_1 A}, \quad |p| \geqslant R_1 > R.$$

Donc de (7.5) et de la dernière inégalité on déduit

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} F_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{C_{R_1}} \frac{e^{-R_1 A}\varepsilon |e^{pt}|}{R_1} d\varphi \leqslant \frac{2\pi R_1 \varepsilon}{2\pi R_1} < \varepsilon,$$

et $\left|\sum_{n=N}^{\infty} F_n(t)\right| < \varepsilon$ pour tous les $t \in [0, A]$. La convergence uniforme est démontrée. ■

Exemples. De toute évidence l'opérateur $e^{\frac{\lambda}{p}}$ est régulier. On a

$$e^{-\frac{\lambda}{p}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!\, p^n}.$$

La série est convergente pour $|p| > 0$, donc

$$e^{-\frac{\lambda}{p}} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n t^n}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{\lambda t}).$$

De façon analogue, on a

$$e^{\frac{\lambda}{p}} = J_0(2\sqrt{-\lambda t}) = J_0(i2\sqrt{\lambda t}) = I_0(2\sqrt{\lambda t}).$$

On établit de même sans peine que

$$\frac{1}{p^\nu} e^{-\frac{\lambda}{p}} = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{\lambda t}), \tag{7.6}$$

$$\frac{1}{p^\nu} e^{\frac{\lambda}{p}} = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{\lambda t}). \tag{7.7}$$

L'opérateur $\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}$ est visiblement régulier et pour $|p| > \lambda > 0$ on a

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{p^2}}} = \left(1+\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!},$$

ou

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)(\lambda t)^{2k}}{k!\,1\cdot 2\cdot 3\ldots k\,(k+1)\ldots(2k-1)\,2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\,(\lambda t)^{2k}}{2^k\cdot k!\cdot 1\cdot 3\ldots(2k-1)\cdot 2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = J_0(\lambda t);$$

donc $\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} = J_0(\lambda t)$. On reconnaît l'image opérationnelle de la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Au § 12 on démontrera

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}\left(\sqrt{p^2+\lambda^2}-p\right)^n = \lambda^n J_n(\lambda t).$$

Le premier membre est un opérateur régulier (cf. (12.12)). On démontre cette formule en appliquant la méthode précédente.

2. Calcul de certains opérateurs. En calcul opérationnel on a affaire à des opérateurs se ramenant en principe à la forme $\bar{a}(p)$ (cf. § 6). Mais d'abord il faut indiquer des critères de réductibilité d'un opérateur $\bar{a}(p)$ et, si réductibilité il y a, le moyen de trouver cette fonction. Ce problème est souvent résoluble de façon approchée, i.e. on ne peut calculer que des valeurs isolées de la fonction.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur $\bar{a}(p)$ soit réductible à une fonction $\varphi(t) \in S$ est que $\bar{a}(p)$ et $\varphi(t)$ vérifient la relation

$$\bar{a}(p) = p\int_0^{\infty} \varphi(t)\,e^{-pt}\,dt, \quad \operatorname{Re} p > \gamma. \tag{7.8}$$

Donc, l'opérateur $\bar{a}(p)$ se ramène à une fonction $\varphi(t)$ si la fonction de la variable complexe $\frac{\bar{a}(p)}{p}$ est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente. Au § 2 on a énuméré les conditions suffisantes pour qu'une fonction analytique donnée dans $\operatorname{Re} z > \gamma$ soit représentable par une intégrale de Laplace. S'il est établi qu'un opérateur $\bar{a}(p)$ se ramène à une fonction, pour trouver cette dernière dans le cas général il faut se servir du théorème d'inversion de l'intégrale de Laplace

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{a}(p)}{p^2}\,e^{pt}\,dp. \tag{7.9}$$

Si l'on peut dériver sous le signe d'intégration on a

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{a}(p)}{p}\,e^{pt}\,dp. \tag{7.10}$$

Pour obtenir une expression commode au calcul de la fonction $\varphi(t)$ il faut déformer le chemin d'intégration dans les formules (7.9) et (7.10). Parfois en appliquant le lemme de Jordan et le théorème des résidus on peut obtenir $\varphi(t)$ sous la forme d'une série.

Théorème 3. *Supposons que* 1) $\bar{a}(p)$ *est une fonction régulière en toute région finie du plan de la variable complexe* p *sauf en un ensemble de points* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(|p_1| \leq |p_2| < \ldots < |p_n| < \ldots)$ *qui sont les pôles de la fonction* $\frac{\bar{a}(p)}{p}$ *et que* $\operatorname{Re} p_n < \gamma_0$ *pour tous les* n;

2) *existe la limite*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{a}(p)}{p} e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{a}(p)}{p} e^{pt}\, dp, \quad \gamma > \gamma_0;$$

3) *existe une suite de contours simples* c_n *s'appuyant sur la droite* $\operatorname{Re} p = \gamma$ *aux points* $\gamma + i\beta_n$, $\gamma - i\beta_n$. *(Ces contours sont contenus*

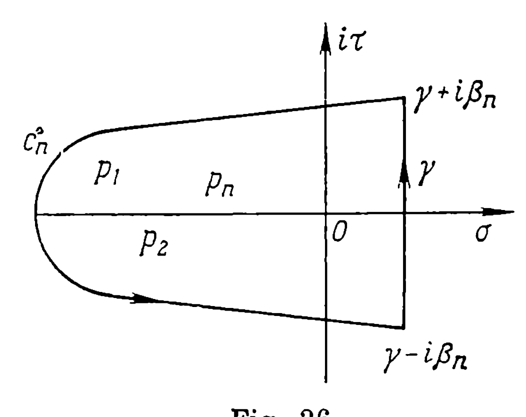


Fig. 26

dans le demi-plan $\operatorname{Re} p < \gamma$ *et ne passent pas par les pôles* p_n.) *Chaque contour* c_n *renferme l'origine des coordonnées et les* n *premiers pôles* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (fig. 26).

4) *pour tous les* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{c_n} \frac{\bar{a}(p)}{p} e^{pt}\, dp = 0;$$

alors la valeur de l'intégrale est égale à la série convergente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{a}(p)}{p} e^{pt}\, dp = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t),$$

où $r_n(t)$ *est le résidu de la fonction* $\frac{\bar{a}(p)}{p} e^{pt}$ *au point* $p = p_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *et* $r_0(t)$ *le résidu au point* 0.

R e m a r q u e. Si la fonction $\frac{\bar{a}(p)}{p}$ vérifie les conditions du lemme de Jordan, il semble naturel de prendre pour contours c_n des arcs de cercle.

Si existent des suites de nombres positifs β_n et δ_n et un nombre $Q > 0$ tels que

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0;$$

$$2)\ \left|\frac{\bar{a}(\sigma \pm i\beta_n)}{\sigma \pm i\beta_n}\right| < \delta_n, \quad \left|\frac{\bar{a}(-\beta_n + i\tau)}{-\beta_n + i\tau}\right| < Q, \ -\beta_n \leqslant \sigma \leqslant \gamma, \ |\tau| \leqslant \beta_n,$$

pour contours c_n on peut prendre celui de la fig. 27.

E x e m p l e s. 1. L'opérateur $\sqrt{p}\, e^{-\lambda\sqrt{p}}$, $\lambda > 0$. La fonction $\bar{f}(p) = \frac{\sqrt{p}}{p} e^{-\lambda\sqrt{p}}$ est visiblement bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \gamma_0 > 0$ et l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{\sigma + i\tau}} e^{-\lambda\sqrt{\sigma+i\tau}}\right| d\tau < \infty.$$

donc (cf. théorème 2, § 2) la fonction $\bar{f}(p)$ est représentable par une intégrale de Laplace. Ainsi l'opérateur $\sqrt{p}e^{-\lambda\sqrt{p}}$ est réductible

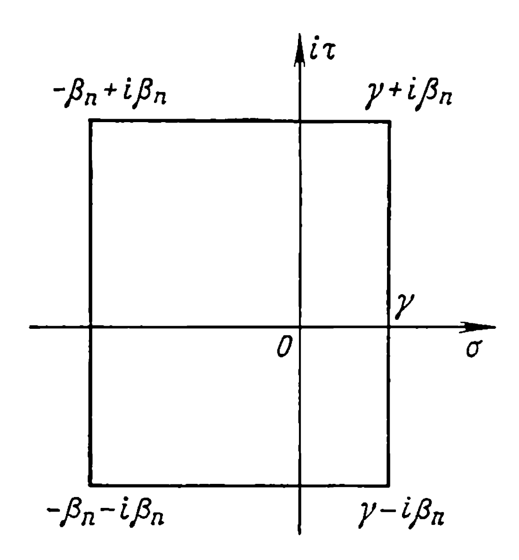


Fig. 27

à une fonction. Cette fonction prend une valeur égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{-\lambda\sqrt{p}+tp}}{\sqrt{p}}\, dp, \quad \gamma > 0.$$

Pour calculer cette intégrale faisons le changement de variables $\sqrt{tp}-\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}=w$. On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}+tp}}{\sqrt{p}}\,dp=\frac{1}{\pi i\sqrt{t}}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\left(\sqrt{tp}-\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4t}}\,d\left(\sqrt{tp}\right)=$$

$$=\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\pi i\sqrt{t}}\int_L e^{w^2}\,dw;$$

la droite $\operatorname{Re} p=\gamma$ se transformant en l'hyperbole L, et

$$\sqrt{p}\,e^{-\lambda\sqrt{p}}=\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\pi i\sqrt{t}}\,C,$$

où $C=\int_L e^{w^2}\,dw$ est une constante. Pour déterminer C, posons $\lambda=0$ (cf. § 6, pt. 2, corollaire). Alors $\sqrt{p}=\frac{C}{\pi i\sqrt{t}}$, mais

$$\sqrt{p}=p^{\frac{1}{2}}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

on a donc $\frac{1}{\sqrt{\pi i}}=\frac{C}{\pi i\sqrt{t}}$ ou $C=i\sqrt{\pi}$; et

$$\sqrt{p}\,e^{-\lambda\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}. \tag{7.11}$$

2. L'opérateur $\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{-\xi\sqrt{p^2+1}}$, $\xi>0$. Comme $\operatorname{Re}\left(\xi\sqrt{p^2+1}\right)>$ >0 lorsque $\operatorname{Re} p>0$, la fonction $\bar{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{-\xi\sqrt{p^2+1}}$ remplit les conditions du théorème 3, § 2. Donc, l'opérateur $\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{-\xi\sqrt{p^2+1}}$ est réductible à une fonction qui prend une valeur égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{e^{-\xi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)}}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{(t-\xi)p}\,dp.$$

Posons

$$\overline{\Phi}(p)=\frac{e^{-\xi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

La fonction $\overline{\Phi}(p)$ possède deux points singuliers: $p = i$ et $p = -i$. Joignons-les par une coupure. Dans ce cas $\overline{\Phi}(p)$ sera régulière et univalente dans le plan muni de cette coupure. La fonction $w = \sqrt{p^2+1} - p$ applique le plan de la variable complexe p avec la coupure dans le disque unitaire du plan de la variable complexe w. Donc

$$|\overline{\Phi}(p)| \leqslant \frac{e^{\xi|\omega|}}{|\sqrt{p^2+1}|} \leqslant \frac{e^{\xi}}{|\sqrt{p^2+1}|}.$$

Et $\overline{\Phi}(p)$ remplit les conditions du lemme de Jordan. Ce dernier entraîne que pour $t < \xi$ l'intégrale est nulle, et pour $t > \xi$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-\xi\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{p^2+1}} e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\xi(\sqrt{p^2+1}-p)}}{\sqrt{p^2+1}} e^{(t-\xi)p}\,dp,$$

où c est un contour quelconque fermé contenant la coupure du plan de la variable p. Si dans la dernière intégrale on fait le changement de variable $w = \sqrt{p^2+1} - p$, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\xi(\sqrt{p^2+1}-p)}}{\sqrt{p^2+1}} e^{(t-\xi)p}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\xi w-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)(t-\xi)}\frac{dw}{w},$$

où Γ est un cercle quelconque $|w| = \text{const}$. En posant $z = w\sqrt{\frac{t+\xi}{t-\xi}}$, on déduit l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\xi w-\frac{1}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)(t-\xi)}\frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\sqrt{t^2-\xi^2}\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sqrt{t^2-\xi^2}\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Or on sait que (cf. [34]) que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi}\,d\varphi = J_0(x)$, donc

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\xi\sqrt{p^2+1}} = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \xi; \\ J_0\left(\sqrt{t^2-\xi^2}\right), & \text{si } t > \xi. \end{cases} \qquad (7.12)$$

3. L'opérateur $\ln(1+p)$. Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp.$$

Prouvons qu'elle est convergente et ramenons-la à une forme qui en facilite le calcul. Traçons dans le plan de la variable $p = re^{i\varphi}$ une coupure joignant le point $p = -1$ au point à l'infini en suivant

la partie négative de l'axe réel. Dans le nouveau plan, la fonction $\frac{\ln(1+p)}{p}$ sera une fonction régulière univalente prenant les valeurs

$$\frac{\ln|1-r|+\pi i}{-r} \quad \text{et} \quad \frac{\ln|1-r|-\pi i}{-r}$$

sur les bords de la coupure.

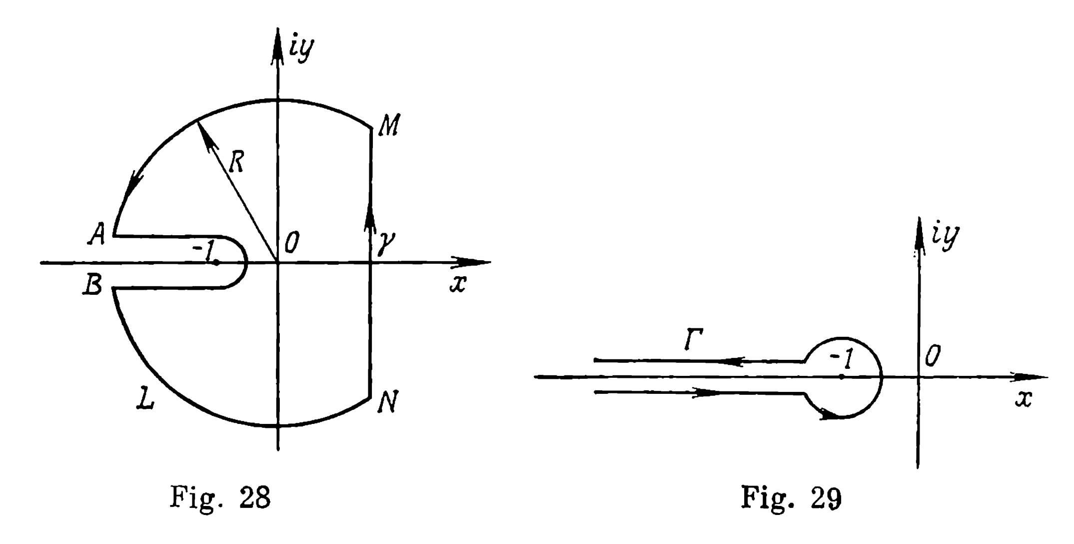


Fig. 28 Fig. 29

Soit un contour fermé L (fig. 28). De toute évidence

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp = 0.$$

Or la fonction $\Phi(p) = \frac{\ln(1+p)}{p}$ remplit les conditions du lemme de Jordan. En supposant maintenant que $R \to \infty$, on s'assure que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp$$

où Γ est le contour de la figure 29. En tendant ce contour sur les bords de la coupure, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\ln(r-1)+\pi i}{r} e^{-rt}\,dr +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\infty^1 \frac{\ln(r-1)-\pi i}{r} e^{-rt}\,dr,$$

d'où il suit que $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln(1+p)}{p} e^{pt}\,dp = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$, et

$$\ln(1+p) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = -Ei(-t). \tag{7.13}$$

4. L'opérateur $\frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}}$, $\xi \in]0, l[$. Pour le calculer on se servira du théorème 3. Soit $\operatorname{Re} p > \gamma > 0$, $p = re^{i\varphi}$, alors $\sqrt{p} = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}$ et $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où

$$\operatorname{Re} \sqrt{p} = \sqrt{r} \cos\frac{\varphi}{2} \geqslant \sqrt{r}\, \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{r}{2}} > \sqrt{\frac{\gamma}{2}},$$

on a donc

$$\left|\frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}}\right| = \left| e^{(\xi - l)\sqrt{p}} \frac{1 + e^{-2\xi\sqrt{p}}}{1 + e^{-2l\sqrt{p}}}\right| \leqslant e^{-(l-\xi)\sqrt{\frac{r}{2}}} \left(\frac{1 + e^{-2\xi\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}}{1 + e^{-2l\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}} \right).$$

D'où il suit que pour $\xi \in [0, l[$ l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}} \frac{e^{pt}}{p}\, dp$$

est absolument convergente. La deuxième condition du théorème 3 est réalisée. Les points singuliers de la fonction $\bar{f}(p) = \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}}$ seront uniquement les pôles $z_0 = 0$ et $z_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, $k = 1, 2, \ldots$ Donc, la première condition du théorème 3 est également remplie. Montrons que la troisième condition l'est aussi. Plus exactement montrons que sur les paraboles (fig. 30)

$$r = \frac{2a_n^2}{1 - \cos\varphi} = \frac{a_n^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

où

$$a_n = \frac{\pi n}{l},$$

on a l'inégalité

$$\left|\frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}}\right| \leqslant 1.$$

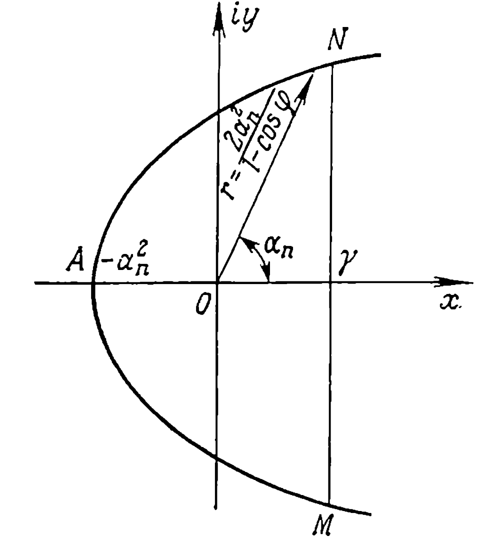


Fig. 30

En effet, des calculs directs montrent que si le point $p = re^{i\varphi}$ est situé sur la parabole, en utilisant l'identité $|\operatorname{ch}(x + iy)|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y$, on obtient

$$\left|\frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}}\right|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2\left[a_n \xi \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right] + \cos^2 a_n \xi}{\operatorname{sh}^2\left[a_n l \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right] + 1} \leqslant 1.$$

En désignant par c_n l'arc de parabole NAM, il vient comme dans la démonstration du lemme de Jordan que lorsque $\xi \in [0, l[$ et $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{c_n} \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 3 sont remplies. Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}} \frac{e^{pt}}{p} dp = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t),$$

où $r_0(t)$ est le résidu au point $z = 0$, et $r_k(t)$ de résidu au point p_k. Tous calculs faits, on obtient

$$\frac{\operatorname{ch} \xi \sqrt{p}}{\operatorname{ch} l \sqrt{p}} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} e^{-t\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \cos \frac{\pi\xi(2k-1)}{2l}. \qquad (7.14)$$

3. Transformation d'Efros. Il y a parfois intérêt à se servir du théorème 5, § 2 pour établir si un opérateur donné $\bar{a}(p)$ est réductible à une fonction et pour le calcul de cette fonction. Ce théorème entraîne le

Théorème 4. *Si l'opérateur* $\bar{a}(p)$ *est représentable par une fonction composée*

$$\bar{a}(p) = pH\left[\frac{\bar{h}(p)}{p}\right], \qquad (7.15)$$

où l'opérateur $\bar{h}(p)$ *est réductible à une fonction* $h(t) \in S$, *et* $H(z)$ *est une fonction analytique dans le disque* $|z| \leqslant \rho$, $H(0) = 0$, *alors* $\bar{a}(p)$ *est réductible à une fonction* $a(t) \in S$.

D é m o n s t r a t i o n. En effet, par hypothèse, la fonction $\frac{\bar{h}(p)}{p}$ est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente. D'où il suit que la fonction $H\left[\frac{\bar{h}(p)}{p}\right]$ est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente, i.e.

$$\bar{a}(p) = pH\left[\frac{\bar{h}(p)}{p}\right] = p\int_0^{\infty} a(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

et l'intégrale est absolument convergente pour Re $p > \gamma$, donc l'opérateur $\bar{a}(p)$ se ramène à une fonction.

Soit la fonction $G(z) = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}$, où ζ est un paramètre complexe. Il est évident que $G(z)$ est analytique dans le domaine $|z| < |\zeta| = \rho$, donc l'opérateur $\frac{p}{\zeta - \frac{\bar{h}(p)}{p}} - \frac{p}{\zeta}$ se ramène à une

fonction. Posons

$$\frac{p}{\zeta-\frac{\bar{h}(p)}{p}}-\frac{p}{\zeta}=\frac{p\bar{h}(p)}{\zeta(\zeta p-\bar{h}(p))}=K(t;\zeta). \tag{7.16}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $\frac{1}{2\pi i}H(\zeta)$ et intégrant sur le cercle $|\zeta|=\rho$, on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{pH(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\frac{\bar{h}(p)}{p}}-\frac{p}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{H(\zeta)\,d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}K(t;\zeta)H(\zeta)\,d\zeta.$$

Or $H(0)=0$, donc la formule de Cauchy (1.20) donne

$$pH\left[\frac{h(p)}{p}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}K(t;\zeta)H(\zeta)\,d\zeta=a(t).\ \blacksquare \tag{7.17}$$

Cette formule peut être appliquée au calcul de la fonction $a(t)$. Un exemple simple est $\bar{h}(p)=1$; alors $pH\left|\frac{1}{p}\right|$ est un opérateur régulier. On a

$$K(t;\zeta)=\frac{p}{\zeta(p\zeta-1)}=\frac{p}{\zeta^2\left(p-\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{1}{\zeta^2}e^{\frac{1}{\zeta}}$$

et

$$pH\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}e^{\frac{t}{\zeta}}H(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

En posant $\frac{1}{\zeta}=z$, on obtient

$$\bar{a}(p)=pH\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}}e^{tz}H\left(\frac{1}{z}\right)dz.$$

Cette égalité s'identifie à (7.4).

Voyons un autre procédé de calcul d'une fonction par son image opérationnelle.

Théorème 5. *Si un opérateur* $\bar{a}(p)$ *est représentable par* $\bar{a}(p)=$ $=\frac{\bar{\Phi}(q(p))}{pq(p)}$ *et a)* $\bar{\Phi}(p)=p\int_0^\infty\Phi(t)e^{-pt}\,dt$ *et* $\int_0^\infty|\Phi(t)|e^{-\gamma_0 t}\,dt<\infty$, *où* $\gamma_0>0$; *b)* $q(p)$ *est une fonction analytique dans le demi-plan* $\operatorname{Re}p>\gamma_0\geqslant 0$ *et vérifiant la condition* $\operatorname{Re}q(p)\geqslant\gamma_0$, *alors l'opéra-*

teur $\overline{a}(p)$ *se ramène à une fonction appartenant à* S:

$$\overline{a}(p)=\int_0^\infty L(t;\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi, \tag{7.18}$$

où

$$L(t;\xi)=\frac{1}{p}e^{-\xi q(p)}. \tag{7.19}$$

D é m o n s t r a t i o n. Les conditions a) et b) entraînent la convergence uniforme et absolue dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma_0$ de l'intégrale

$$\frac{1}{q(p)}\overline{\Phi}(q(p))=\int_0^\infty e^{-\xi q(p)}\Phi(\xi)\,d\xi. \tag{7.20}$$

En effet,

$$\left|\int_0^\infty e^{-\xi q(p)}\Phi(\xi)\,d\xi\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-\xi \operatorname{Re} q(p)}\,|\Phi(\xi)|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\infty e^{-\xi\gamma_0}\,|\Phi(\xi)|\,d\xi<\infty, \tag{7.21}$$

donc l'intégrale (7.20) est une fonction analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma_0$. L'inégalité

$$\left|\frac{\overline{\Phi}(q(p))}{q(p)}\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-\xi\gamma_0}\,|\Phi|\,(\xi)\,|\,d\xi$$

entraîne que la fonction $\dfrac{\overline{\Phi}(q(p))}{q(p)}$ est uniformément bornée dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma_0$, donc existe l'intégrale (cf. théorème 3, § 2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\overline{\Phi}(q(p))}{p^2 q(p)}e^{pt}\,dp=a(t),$$

et

$$p\int_0^\infty a(t)\,e^{-pt}\,dt=\frac{\overline{\Phi}(q(p))}{pq(p)}=\overline{a}(p). \tag{7.22}$$

Ainsi, l'opérateur $\overline{a}(p)$ se ramène à la fonction $a(t)$. Pour calculer $a(t)$ on remarquera que quel que soit $\xi\in[0,\infty[$, l'opérateur $\frac{1}{p}e^{-\xi q(p)}$ se ramène à la fonction

$$L(t;\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{-\xi q(p)+pt}}{p^2}\,dp, \tag{7.23}$$

puisque la fonction $\frac{e^{\xi q(p)}}{p^2}$, $\xi \in [0, \infty[$, remplit toutes les conditions du théorème 3, § 2 et, par conséquent, elle est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente. En particulier, l'intégrale (7.23) est absolument convergente et eu égard à (7.20) et (7.21), il vient

$$\int_0^\infty L(t;\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}\,dp}{p^2} \int_0^A e^{-\xi p(q)}\Phi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2}\,dp \int_0^\infty e^{-\xi q(p)}\Phi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}\overline{\Phi}(q(p))}{q(p)}\,\frac{dp}{p^2} = a(t).$$

Comparant avec (7.22) il vient

$$\frac{\overline{\Phi}(q(p))}{pq(p)} = \int_0^\infty L(t;\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi,$$

d'où l'on tire

$$\overline{\Phi}(q(p)) = pq(p) \int_0^\infty L(t;\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi; \tag{7.24}$$

multipliant les deux membres par l'opérateur $\overline{b}(p)$, on a

$$\overline{b}(p)\,\overline{\Phi}(q(p)) = p\overline{b}(p)\,q(p) \int_0^\infty L(t;\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi.$$

Si l'on pose $p\overline{b}(p)\,q(p)\,L(t;\ \xi) = \Psi(t;\ \xi)$, on obtient

$$\overline{b}(p)\,\overline{\Phi}(q(p)) = \int_0^\infty \Psi(t;\ \xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi.$$

En général, cette intégrale est convergente au sens opérationnel (cf. § 6). L'égalité (7.24) définit la *transformée d'Efros.*

E x e m p l e s. 1. Soit $q(p) = \frac{1}{p}$. De toute évidence, $\operatorname{Re} \frac{1}{p} > 0$ si $\operatorname{Re} p > 0$. Donc, $\gamma_0 = 0$. En vertu de (7.6) il vient

$$L(t;\ \xi) = \frac{1}{p}\,e^{-\frac{\xi}{p}} = \sqrt{\frac{t}{\xi}}\,J_1(2\sqrt{t\xi})$$

et

$$\overline{\Phi}\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty \Phi(\xi)\,J_1(2\sqrt{t\xi})\sqrt{\frac{t}{\xi}}\,d\xi.$$

En appliquant aux deux membres de la dernière égalité l'opérateur p^{1-n} et compte tenu de ce que $p^{1-n}L(t;\ \xi)=\frac{1}{p^n}e^{-\frac{\xi}{t}}=$
$=\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t\xi})$, il vient

$$p^{1-n}\Phi\left(\frac{1}{p}\right)=\int_0^\infty \Phi(\xi)\,J_n(2\sqrt{t\xi})\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}}d\xi.$$

2. Soit $q(p)=\sqrt{p}$. De (7.11) on déduit

$$\sqrt{p}e^{-\xi\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{\xi^2}{4t}},$$

donc,

$$\frac{1}{p}e^{-\xi\sqrt{p}}=L(t;\ \xi)=\frac{1}{p\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}},$$

d'où

$$\frac{\overline{\Phi}(\sqrt{p})}{p\sqrt{p}}=\frac{1}{p\sqrt{p}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\Phi(\xi)\,d\xi,$$

ou

$$\overline{\Phi}(\sqrt{p})=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\Phi(\xi)\,d\xi. \tag{7.25}$$

3. Soit $q(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$. Pour calculer l'opérateur $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ il est plus facile de déterminer d'abord $\overline{\Phi}\left(\frac{1}{p}\right)$ à partir du premier exemple, et ensuite $\overline{\Phi}\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ à l'aide du deuxième. On obtient, en définitive,

$$\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}}d\xi\int_0^\infty \Phi(u)\,J_1(2\sqrt{\xi u})\sqrt{\frac{\xi}{u}}\,du.$$

4. Soit $q(p)=p+\frac{1}{p}$. On a

$$L(t,\ \xi)=\frac{1}{p}e^{-\xi\left(p+\frac{1}{p}\right)}=\frac{e^{-\xi p}}{p}e^{-\frac{\xi}{p}}=\frac{1}{p}e^{-\xi p}J_0(2\sqrt{t\xi}),$$

ou (cf. (5.73))

$$L(t;\ \xi)=\begin{cases}0 & \text{pour } t<\xi,\\ \frac{1}{p}J_0(2\sqrt{\xi(t-\xi)}) & \text{pour } t\geqslant\xi;\end{cases}$$

donc,

$$\frac{\overline{\Phi}\left(p+\frac{1}{p}\right)}{p\left(p+\frac{1}{p}\right)}=\frac{1}{p}\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\xi(t-\xi)}\right)\Phi(\xi)\,d\xi,$$

ou

$$\frac{\Phi\left(p+\frac{1}{p}\right)}{p+\frac{1}{p}}=\int_0^t J_0\left(2\sqrt{(\xi t-\xi)}\right)\Phi(\xi)\,d\xi. \qquad (7.26)$$

§ 8. Développements asymptotiques

1. Suites et séries asymptotiques. Soient donnés une fonction $f(t)$ définie sur $]\alpha, \beta[$ et un point t_0 appartenant à l'adhérence de ce domaine, i.e. à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Les cas $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ ne sont pas exclus. La notation $f(t) = O(\varphi(t))$ signifie que la valeur absolue de la fonction $f(t)$ dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$ n'est pas supérieure au produit d'une constante par la valeur absolue de $\varphi(t)$. Il existe donc un nombre Q tel que pour toutes les valeurs de $t \in]\alpha, \beta[$, $|f(t)| \leqslant Q\,|\varphi(t)|$. La notation $f(t) = O(\varphi(t))$, $t \to t_0$ signifie que l'égalité $|f(t)| \leqslant Q\,|\varphi(t)|$ est réalisée en un voisinage du point t_0. Si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage du point t_0 tel que pour tous les t contenus dans ce voisinage on ait $|f(t)| < \varepsilon\,|\varphi(t)|$; on écrit alors $f(t) = o(\varphi(t))$, $t \to t_0$. Si dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$, $t \neq t_0$, $\varphi(t)$ ne s'annule pas, alors la condition $f(t) = o(\varphi(t))$, $t \to t_0$ signifie que $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0$ et la condition $f(t) = O(\varphi(t))$, $t \to t_0$ que le quotient $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$, $t \to t_0$, reste borné.

Citons quelques formules pour les symboles O et o:

$$O(O(\varphi)) = O(\varphi),$$

$$O(o(\varphi)) = o(\varphi),$$

$$O(\varphi)\,O(\Psi) = O(\varphi\Psi),$$

$$O(\varphi)\,o(\Psi) = o(\varphi\Psi),$$

$$O(\varphi) + O(\varphi) = O(\varphi),$$

$$o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi).$$

Une suite finie ou infinie de fonctions $\varphi(t)$ est une *suite asymptotique* lorsque $t \to t_0$, $t \in]\alpha, \beta[$ si les fonctions $\varphi_n(t)$ sont définies sur $]\alpha, \beta[$ et pour $t \to t_0$ on a

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n). \qquad (8.1)$$

Exemples de suites asymptotiques:

a) $\varphi_n(t) = (t - t_0)^n, \ t \to t_0$;

b) $\varphi_n(t) = t^{-\lambda_n}, \ t \to \infty$;

c) $\varphi_n(t) = e^{-nt} t^{-\lambda_n}, \ t \to \infty$ où

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots; \ \alpha = 0, \ \beta = \infty.$

Dans la suite nous ne considérerons que des suites asymptotiques $\varphi_n(t)$ données dans le domaine $]0, \infty[$ $(\alpha = 0, \ \beta = \infty)$. Nous omettrons de mentionner ce domaine à chaque fois. Si, étant donnée une fonction $f(t)$, on peut exhiber une suite asymptotique $\varphi_n(t)$ telle que lorsque $t \to t_0$ et N quelconque l'on ait

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(t) + O(\varphi_{N+1}), \tag{8.2}$$

on dit que $f(t)$ se développe en une série asymptotique et l'on note

$$f(t) \approx \sum_{1}^{\infty} a_n \varphi_n, \quad t \to t_0. \tag{8.3}$$

Comme $\varphi_{N+1} = o(\varphi_N)$, on a $O(\varphi_{N+1}) = O(o(\varphi_N)) = o(\varphi_N)$ et le développement (8.2) peut s'écrire

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(t) + o(\varphi_N). \tag{8.4}$$

La somme $\sum\limits_{1}^{N} a_n \varphi_n$ s'appelle *développement asymptotique* de la fonction $f(t)$ jusqu'au N-ième terme compris. Un développement asymptotique composé d'un seul terme se note

$$f(t) \sim a_1 \varphi_1(t), \quad t \to t_0, \tag{8.5}$$

et s'appelle *représentation asymptotique* de la fonction $f(t)$. La notation (8.5) signifie donc que $f(t) = a_1 \varphi_1(t) + o(\varphi_1(t))$. Si $\varphi_1(t)$ n'est pas nulle au voisinage du point t_0, alors (8.5) entraîne $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)}{\varphi_1(t)} = a_1$.

Il est aisé de voir que la fonction $f(t)$, $\varphi_n(t)$ et t_0 étant donnés, admet un développement unique, i.e. les coefficients a_n de la série (8.3) sont uniques. Supposons, en effet, qu'outre (8.3) existe le développement

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(t), \quad t \to t_0.$$

On aurait alors $0 \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \varphi_n(t), \ t \to t_0$. Supposons que les différences $a_n - b_n$ ne sont pas toutes nulles. Soit $a_m - b_m$ la

première différence non nulle. Par définition du développement asymptotique (cf. (8.4)), on a

$$0 = (a_m - b_m)\,\varphi_m(t) + o(\varphi_m), \quad t \to t_0,$$

d'où en divisant par $a_m - b_m$

$$\varphi_m(t) = o(\varphi_m), \quad t \to t_0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc, $a_n = b_n$ pour tous les n.

2. Développement asymptotique de l'original lorsque $t \to \infty$. Les séries asymptotiques sont largement appliquées au calcul approché des fonctions pour des valeurs de l'argument proches de t_0. Lorsqu'on résout un problème par une méthode du calcul opérationnel on a souvent à calculer des valeurs approchées de la solution lorsque $t \to 0$ et $t \to \infty$. Dans ces cas on a intérêt, si cela est possible, à développer la solution en une série asymptotique.

Traitons en détail le cas $t \to \infty$. Ici il faut construire le développement asymptotique de la fonction $f(t)$ d'après son image opérationnelle $\bar{f}(p)$.

Théorème 1. *Supposons que* 1) *la fonction* $f(t) = \lim\limits_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp$, $t \in \,]0, \infty[$, 2) *la fonction* $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ *remplit les conditions du lemme de Jordan*, 3) *la fonction* $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ *possède un nombre fini de points singuliers qui sont des pôles ou des points de ramification*, 4) *qu'au voisinage des points* $p = p_0$ *de plus grande partie réelle la fonction* $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ *se décompose en séries de la forme*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(p_0)(p - p_0)^{\lambda_\nu}, \qquad -\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ *et* $|p - p_0| < l_0$ *où* c_ν *et* λ_ν *dépendent de* p_0. *La fonction* $f(t)$ *admet alors le développement asymptotique*

$$f(t) \approx \sum_{p_0} e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(p_0)}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu - 1}, \tag{8.6}$$

où $\sum\limits_{p_0}$ *indique que la sommation a lieu sur les points singuliers* p_0.

R e m a r q u e. Si $\lambda_\nu = n$ est un entier non négatif, alors $\frac{1}{\Gamma(-\lambda_\nu)} = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par p_0 les points singuliers de la fonction $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ à partie réelle maximale. Il peut exister un ou plusieurs tels points. Désignons par p_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ les autres points singuliers de la fonction $\frac{\bar{f}(p)}{p}$. Par hypothèse, n est fini.

Considérons un contour fermé (fig. 31) constitué du segment AB et de l'arc de cercle L. Prenons le rayon R du cercle si grand que les points singuliers de la fonction $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ soient contenus à l'intérieur du contour $AB + L$. A partir des points p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

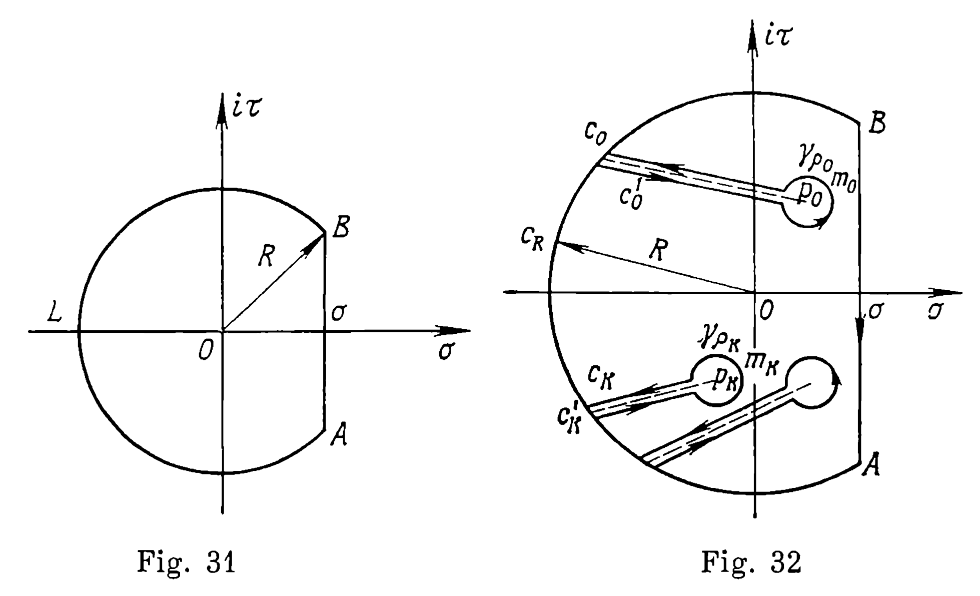


Fig. 31 Fig. 32

traçons des coupures disjointes dont les angles d'inclinaison α_k sont tels que $\frac{\pi}{2} < |\alpha_k| < \pi$ (fig. 32). Dans la suite on verra qu'on a intérêt à prendre les angles d'inclinaison si possible égaux à $\pm\pi$ ou proches de ces valeurs. Sur la figure 32 ces coupures sont représentées en pointillé. Traçons autour de chaque point singulier p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ un contour c_{p_k} composé d'une droite venant de l'infini suivant le bord inférieur de la coupure, d'un cercle γ_{ρ_k} de rayon ρ_k et de centre p_k et d'une droite partant à l'infini suivant le bord supérieur de la coupure (fig. 33). Désignons par C_R le contour $Bc_0m_0c_0' \ldots c_km_kc_k' \ldots AB$. La fonction $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ ne possède pas de points singuliers à l'intérieur de ce contour. Donc, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp = 0.$$

Passons à la limite lorsque $R \to \infty$. En vertu des hypothèses 1) et 2) du théorème, on aura

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp. \tag{8.7}$$

A remarquer que si p_k est un pôle il n'est pas nécessaire de procéder à des coupures. Dans ce cas le contour c_{p_k} est remplacé par le cercle γ_{ρ_k} et l'intégrale correspondante sera égale au résidu de la fonction à intégrer en ce pôle.

Etudions en détail l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\rho_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp,$$

où C_{ρ_k} est le contour de la figure 33. Désignons par Γ_1 le bord supé-

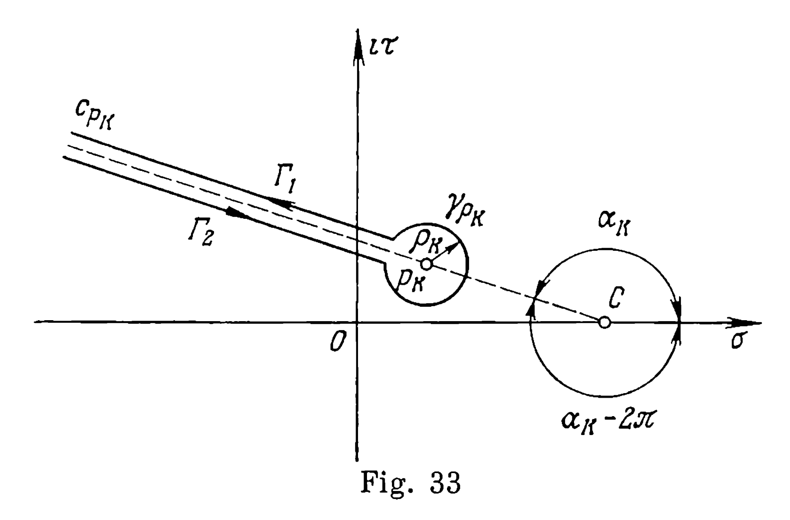


Fig. 33

rieur de la coupure, et par Γ_2 le bord inférieur. Il vient

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\delta_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\rho_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp.$$

Sur les bords des coupures Γ_1 et Γ_2 on a respectivement

$$p = p_k + \lambda e^{i\alpha_k}, \quad dp = e^{i\alpha_k}\, d\lambda$$

et

$$p = p_k + \lambda e^{i(\alpha_k - 2\pi)}, \quad dp = e^{i\alpha_k}\, d\lambda$$

et sur le cercle $\gamma\rho_k$

$$p = p_k + \rho_k e^{i\varphi}; \quad dp = \rho_k e^{i\varphi} i\, d\varphi,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\rho_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho_k}^{\infty} \frac{\bar{f}(p_k + \lambda e^{i\alpha_k})}{p_k + \lambda e^{i\alpha_k}} e^{t(p_k + \lambda e^{i\alpha_k})} e^{i\alpha_k}\, d\lambda - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho_k}^{\infty} \frac{\bar{f}(p_k + \lambda e^{i(\alpha_k - 2\pi)})}{p_k + \lambda e^{i\alpha_k}} e^{t(p_k + \lambda e^{i(\alpha_k - 2\pi)})} e^{i\alpha_k}\, d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\bar{f}(p_k + \rho_k e^{i\varphi})}{p_k + \rho e^{i\varphi}} e^{t(p_k + \rho_k e^{i\varphi})} \rho_k e^{i\varphi} i\, d\varphi.$$

Majorons chacune de ces intégrales lorsque $t \to \infty$. La fonction $\frac{\bar{f}(p)}{p}$ vérifiant les conditions du lemme de Jordan, elle sera pour le moins uniformément bornée sur le bord de la coupure, i.e. il existe une constante Q telle que sur Γ_1 et Γ_2, l'on ait $\left|\frac{\bar{f}_1(p)}{p}\right| \leqslant Q$. On a alors

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp\right| \leqslant \frac{Q}{2\pi}\int_{\rho_k}^{\infty}\left|e^{t(p_k+\lambda e^{i\alpha_k})}e^{i\alpha_k}\right|d\lambda =$$

$$=\frac{Q}{2\pi}e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k}\int_{\rho_k}^{\infty}e^{t\lambda\cos\alpha_k}\,d\lambda = -\frac{Q}{2\pi}\frac{e^{t\rho_k\cos\alpha_k}}{t\cos\alpha_k}e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k}.$$

En vertu du choix de α_k, $\cos\alpha_k < 0$ et l'intégrale de la dernière égalité est convergente. Nous avons ainsi prouvé que lorsque $t \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp = O\left(e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k+t\rho_k\cos\alpha_k}\right). \tag{8.8}$$

De façon analogue, lorsque $t \to \infty$, on obtient pour la deuxième intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp = O\left(e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k+t\rho_k\cos(\alpha_k-2\pi)}\right) = O\left(e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k+t\rho_k\cos\alpha_k}\right).$$

S'agissant de la troisième intégrale, sa majoration implique des raisonnements plus subtils. On remarquera pour l'instant que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp\right| \leqslant \frac{Q}{2\pi}e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k}\int_0^{2\pi}e^{t\rho_k\cos\varphi}\rho_k\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \rho_k Q e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k+t\rho_k} = Q\left(e^{t\,\mathrm{Re}\,p_k+t\rho_k}\right). \tag{8.9}$$

Donc, lorsque $t \to \infty$ on a la majoration générique

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_k}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp = O\left(e^{t(\mathrm{Re}\,p_k+\rho_k)}\right), \tag{8.10}$$

où ρ_k peut être choisi aussi petit que l'on veut. D'où il suit que la décomposition asymptotique de $f(t)$ est définie par les intégrales $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_k}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp$ dont la partie réelle $\mathrm{Re}\,p_k$ est la plus grande. Pour cette raison voyons plus en détail les intégrales $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_0}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp$. Posons $\rho\cos\alpha_0 = -\sigma_0$ de sorte que $\sigma_0 > 0$. Lors-

que $t\to\infty$, (8.8) et (8.9) entraînent

$$\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{C_{\rho_0}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp=\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp+O(e^{-\sigma_0t}). \quad (8.11)$$

Soit $\rho_0 < l_0$. Dans ce cas, à l'intérieur et sur le cercle γ_{ρ_0} on aura le développement (cf. condition 4)

$$\frac{\bar{f}(p)}{p}=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(p-p_0)^{\lambda_\nu}=\sum_{\nu=0}^{N-1}c_\nu(p-p_0)^{\lambda_\nu}+(p-p_0)^{\lambda_N}R_N(p),$$

et la fonction $R_N(p)=\sum\limits_{\nu=N}^{\infty}c_\nu(p-p_0)^{\lambda_\nu-\lambda_N}$ est bornée sur $|p-p_0|\leqslant$ $\leqslant\rho_0$. Donc, il existe un Q_1 tel que $|R_N(p)|\leqslant Q_1$, $|p-p_0|\leqslant\rho_0$.

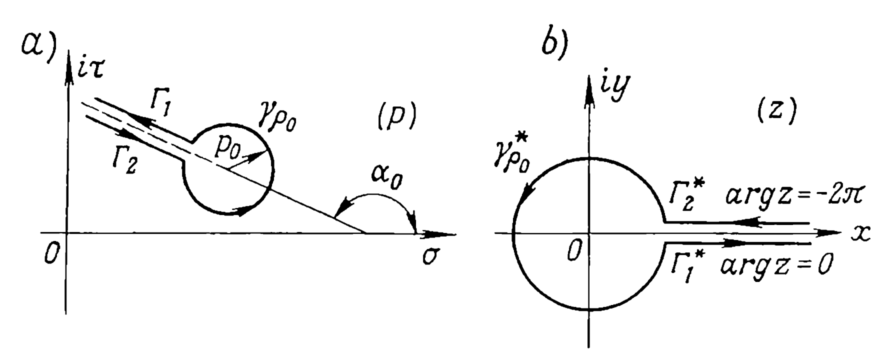


Fig. 34

De toute évidence, on a

$$\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}\frac{\bar{f}(p)}{p}e^{pt}\,dp=\sum_{\nu=0}^{N-1}c_\nu\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp+$$

$$+\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_N}R_N(p)\,e^{pt}\,dp. \quad (8.12)$$

Majorons les intégrales

$$\frac{e^{-p_0t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp \text{ lorsque } t\to\infty.$$

Faisons le changement $p-p_0=ze^{i\alpha_0}$. Le cercle γ_{ρ_0} (fig. 34, a) du plan (p) se transforme en le cercle $\gamma^*_{\rho_0}$ (fig. 34, b) du plan (z) de même rayon ρ_0 mais de centre à l'origine des coordonnées du plan (z). Quant à la coupure, elle passera par la partie positive de l'axe réel du plan (z). En effet, puisque $\arg(p-p_0)$ est tel que

$$\alpha_0-2\pi<\arg(p-p_0)<\alpha_0,$$

il est évident que $\arg z=\arg(p-p_0)\,e^{-i\alpha}$ variera dans les limites

$$-2\pi<\arg z<0$$

et

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt-p_0t}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*_{\rho_0}}z^{\lambda_\nu}e^{i\alpha_0\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}e^{i\alpha_0}\,dz. \quad (8.13)$$

Considérons maintenant le contour T_{ρ_0} formé du cercle $\gamma^*_{\rho_0}$, des deux bords de la coupure joignant le point (0, 0) au point $(\rho_0, 0)$ et du cercle c_ε de rayon petit $\varepsilon>0$ et centré en l'origine des coor-

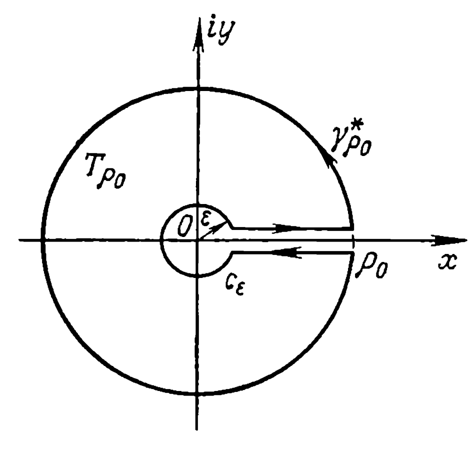


Fig. 35

données (fig. 35). La fonction $z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}$ ne possédant pas de points singuliers à l'intérieur du contour T_{ρ_0}, il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*_{\rho_0}}z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_0}}z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}\,dz,$$

où Γ_{ρ_0} est le contour de la figure 36. Supposons que $\lambda_\nu+1>0$. L'intégrale $\int\limits_{c_\varepsilon}z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}\,dz$ tend vers zéro avec ε. En effet, posant $z=\varepsilon e^{i\varphi}$, $-2\pi<\varphi<0$, il vient de toute évidence

$$\left|\int\limits_{c_\varepsilon}z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}\,dz\right|\leqslant\varepsilon^{\lambda_\nu+1}\int\limits_{-2\pi}^{0}e^{t\varepsilon\cos(\alpha_0+\varphi)}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi e^{t\varepsilon}\varepsilon^{\lambda_\nu+1}\to 0 \text{ lorsque } \varepsilon\to 0,$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*_{\rho_0}}z^{\lambda_\nu}e^{tze^{i\alpha_0}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\rho_0}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho_0}^{0}r^{\lambda_\nu}e^{-2\pi i\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr=\frac{-e^{-2\pi i\lambda_\nu}+1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\rho_0}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr. \quad (8.14)$$

Comme $\cos\alpha_0 < 0$, l'intégrale $\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr$ est convergente et

$$\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr = \int_0^{\rho_0} r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr + \int_{\rho_0}^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr.$$

Posons $te^{i\alpha_0} = e^{\pi i} w$, il vient $\mathrm{Re}\, w > 0$ et $\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr = \int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{-wr} dr$.

Si w est réel et positif, en faisant le changement de variables $wr = \xi$, $dr = \frac{d\xi}{w}$, on trouve

$$\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{-wr} dr = \int_0^\infty \left(\frac{\xi}{w}\right)^{\lambda_\nu} e^{-\xi} \frac{d\xi}{w} = \frac{1}{w^{\lambda_\nu+1}} \int_0^\infty \xi^{\lambda_\nu} e^{-\xi} d\xi = \frac{\Gamma(\lambda_\nu+1)}{w^{\lambda_\nu+1}}.$$

En vertu du principe de prolongement analytique, l'égalité

$$\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{-wr} dr = \frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)}{w^{\lambda_\nu+1}}$$

est valable pour les valeurs complexes de w pourvu que l'inté-

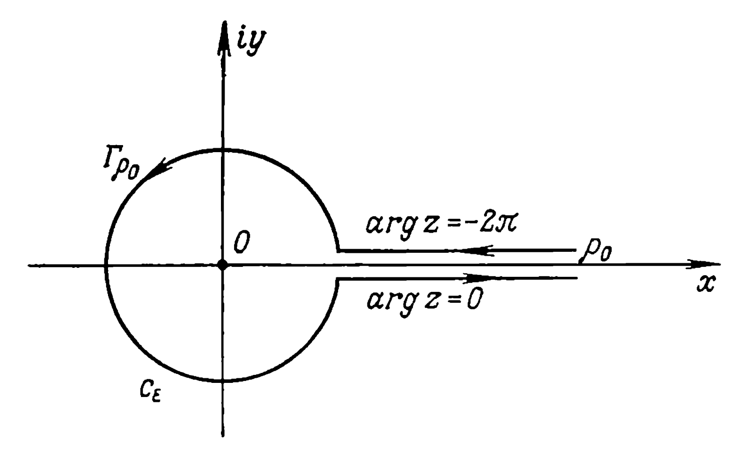


Fig. 36

grale $\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{-wr}$ existe et de plus $-\frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr = \frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)}{[te^{i(\alpha_0-\pi)}]^{1+\lambda_\nu}} = \frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)}{t^{1+\lambda_\nu} e^{i(\alpha_0-\pi)(1+\lambda_\nu)}}$$

et

$$\int_0^{\rho_0} r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha}} dr = \frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)}{t^{1+\lambda_\nu} e^{i(\alpha_0-\pi)(1+\lambda_\nu)}} - \int_{\rho_0}^\infty r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}} dr.$$

Compte tenu de (8.14) et (8.13), il vient

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp=\frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)\,e^{i\alpha_0(1+\lambda_\nu)}\,(1-e^{-2\pi i\lambda_\nu})}{2\pi i t^{1+\lambda_\nu}e^{i(\alpha_0-\pi)(1+\lambda_\nu)}}-$$

$$-\frac{(1-e^{-2\pi i\lambda_\nu})\,e^{i\alpha_0(1+\lambda_\nu)}}{2\pi i}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr. \qquad (8.15)$$

La dernière égalité peut être simplifiée à l'aide de la formule $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$. Il vient

$$\Gamma(-\lambda_\nu)\,\Gamma(1+\lambda_\nu)=-\frac{\pi}{\sin\pi\lambda_\nu},\quad\text{ou}\quad\frac{1}{\Gamma(-\lambda_\nu)}=-\frac{\sin\pi\lambda_\nu\Gamma(1+\lambda_\nu)}{\pi}.$$

Tous calculs faits dans le premier terme du second membre de (8.15), on obtient

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp=-\frac{\Gamma(1+\lambda_\nu)\sin\pi\lambda_\nu}{t^{1+\lambda_\nu}\pi}-$$

$$-\frac{(1-e^{-2\pi i\lambda_\nu})e^{i\alpha_0(1+\lambda_\nu)}}{2\pi i}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr,$$

d'où

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp=-\frac{1}{t^{1+\lambda_\nu}\Gamma(-\lambda_\nu)}-$$

$$-\frac{(1-e^{-2\pi i\lambda_\nu})}{2\pi i}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr. \qquad (8.16)$$

Désormais on peut se passer de la condition $\lambda_\nu+1=0$. En effet, l'égalité (8.16) obtenue sous la condition $\lambda_\nu+1>0$ est, d'après le principe de prolongement, valable pour toutes les valeurs de λ_ν telles qu'existent les premier et second membres de (8.16). En particulier, pour toutes les valeurs réelles de λ_ν. D'après la formule (8.16), pour étudier le comportement de l'intégrale

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\rho_0}}(p-p_0)^{\lambda_\nu}e^{pt}\,dp\ \text{ lorsque }\ t\to\infty,$$

il faut majorer l'intégrale

$$\int\limits_{\rho_0}^{\infty}r^{\lambda_\nu}e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr.$$

On a de toute évidence

$$\left|\int_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr\right| \leqslant \int_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_\nu}\,|e^{tre^{i\alpha_0}}|\,dr =$$

$$= \int_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_\nu} e^{tr\cos\alpha_0}\,dr < e^{\frac{t\rho_0\cos\alpha_0}{2}} \int_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_\nu} e^{\frac{tr}{2}\cos\alpha_0}\,dr,$$

or $\rho_0\cos\alpha_0 = -\sigma_0$, $\sigma_0 > 0$. Donc, lorsque $t\to\infty$,

$$\int_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_\nu} e^{tre^{i\alpha_0}}\,dr = O\left(e^{-\frac{\sigma_0 t}{2}}\right). \tag{8.17}$$

Et de (8.16) et (8.17) il vient, lorsque $t\to\infty$,

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_0}} (p-p_0)^{\lambda_\nu} e^{pt}\,dp = \frac{1}{t^{1+\lambda_\nu}\Gamma(-\lambda_\nu)} + O\left(e^{-\frac{\sigma_0 t}{2}}\right). \tag{8.18}$$

Pour obtenir le développement asymptotique de l'intégrale (cf. (8.12))

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int_{C_{\rho_0}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt}\,dp,$$

lorsque $t\to\infty$, il faut étudier le comportement de l'intégrale

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_0}} (p-p_0)^{\lambda_N} R_N(p)\, e^{pt}\,dp.$$

Supposons que N est choisi si grand que $\lambda_N + 1 > 0$. En procédant, comme précédemment, on obtient

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_0}} (p-p_0)^{\lambda_N} R_N(p)\, e^{pt}\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*_{\rho_0}} z^{\lambda_N} R_N(p_0 + ze^{i\alpha_0})\, e^{tze^{i\alpha_0}} e^{i\alpha_0(1+\lambda_N)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho_0}} z^{\lambda_N} R_N(p_0 + ze^{i\alpha_0})\, e^{i\alpha_0(1+\lambda_N)} e^{ze^{i\alpha_0}}\,dz =$$

$$= \frac{e^{i\alpha_0(1+\lambda_\nu)}}{2\pi i}\left[\int_0^{\rho_0} r^{\lambda_N} e^{tre^{i\alpha_0}} R_N(p + re^{i\alpha_0})\,dr + \right.$$

$$\left. + \int_{\rho_0}^{0} r^{\lambda_N} e^{-2\pi i\lambda_N} e^{tre^{i\alpha_0}} R_N(p_0 + re^{i\alpha_0 - 2\pi i})\,dr\right].$$

Comme $|R_N(p)| \leqslant Q_1$, $|p-p_0| \leqslant \rho_0$, il vient

$$\left| \frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} (p-p_0)^{\lambda_N} R_N(p) e^{pt} \, dp \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q_1}{\pi} \int\limits_0^{\rho_0} r^{\lambda_N} e^{tr \cos \alpha_0} \, dr = \frac{Q_1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} r^{\lambda_N} e^{tr \cos \alpha_0} \, dr -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{\rho_0}^{\infty} r^{\lambda_N} e^{tr \cos \alpha_0} \, dr = \frac{Q_1 \Gamma(1+\lambda_N)}{(-t \cos \alpha_0)^{1+\lambda_N}} + O(e^{-\frac{t\sigma}{2}}) = O\left(\frac{1}{t^{\lambda_N+1}}\right).$$

Donc, lorsque $t \to \infty$, on a

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\rho_0}} (p-p_0)^{\lambda_N} R_N(p) e^{pt} \, dp = O\left(\frac{1}{t^{\lambda_N+1}}\right). \tag{8.19}$$

Compte tenu de (8.12), (8.18) et (8.19), il vient

$$\frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_0}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt} \, dp = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{c_\nu}{t^{\lambda_\nu+1} \Gamma(-\lambda_\nu)} + O\left(\frac{1}{t^{\lambda_N+1}}\right);$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_0}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt} \, dp = e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{c_\nu}{t^{\lambda_\nu+1} \Gamma(-\lambda_\nu)} + e^{p_0 t} O\left(\frac{1}{e^{\lambda_N+1}}\right). \tag{8.20}$$

En déduisant la formule (8.20) nous n'avons nulle part utilisé la condition que la partie réelle des points singuliers p_0 était la plus grande. La formule (8.20) est donc valable pour toute intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_k}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt} \, dp,$$

et de (8.7) il suit immédiatement que le développement asymptotique de $f(t)$ lorsque $t \to \infty$ est donné par les intégrales $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_0}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt} \, dp$, où la partie réelle des points p_0 est la plus grande.

En sommant sur tous les points p_0, on obtient

$$f(t) \approx \sum_{p_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_{\rho_0}} \frac{\bar{f}(p)}{p} e^{pt} \, dp$$

ou compte tenu de (8.20)

$$f(t) \approx \sum_{p_0} e^{p_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(p_0)}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu-1}. \blacksquare$$

Exemple. Trouver le développement asymptotique de la fonction

$$f(t)=e^{-at}\int_0^t e^{a\xi}\xi^{\mu}\,d\xi, \qquad a>0,$$

lorsque $t\to\infty$. Pour trouver l'image opérationnelle de cette fonction on remarquera que

$$t^{\mu}=\frac{\Gamma(1+\mu)}{p^{\mu}} \quad \text{et} \quad e^{-at}=\frac{p}{p+a}.$$

On a donc l'égalité

$$\frac{\Gamma(1+\mu)\,p}{p^{\mu}(p+a)}=\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-a(t-\xi)}\xi^{\mu}\,d\xi,$$

d'où

$$e^{-at}\int_0^t e^{a\xi}\xi^{\mu}\,d\xi=\frac{\Gamma(1+\mu)}{p^{\mu}(p+a)}=\bar f(p).$$

Il est évident que la fonction $\frac{\bar f(p)}{p}=\frac{\Gamma(1+\mu)}{p^{1+\mu}(p+a)}$ possède deux points singuliers: un pôle, $p=-a$, et un point de ramification, $p=0$. Comme $a>0$, $p=p_0=0$ sera le point singulier de plus grande partie réelle. Le développement de $\frac{\bar f(p)}{p}$ au voisinage de ce point sera visiblement

$$\frac{\bar f(p)}{p}=\frac{\Gamma(1+\mu)}{p^{1+\mu}}\,\frac{1}{p+a}=\frac{\Gamma(1+\mu)}{p^{1+\mu}}\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{p}{a}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\mu)(-1)^k p^{k-1-\mu}}{a^{k+1}}.$$

Donc, $\lambda_k=k-1-\mu$, $c_k=\frac{\Gamma(1+\mu)(-1)^k}{a^{k+1}}$, $p_0=0$; et

$$f(t)=e^{-at}\int_0^t e^{a\xi}\xi^{\mu}\,d\xi\approx\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(1+\mu)}{a^{k+1}t^{k-\mu}}\,\frac{1}{\Gamma(1+\mu-k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{a^{k+1}t^{k-\mu}}$$

3. Limites. Un problème important du calcul opérationnel est l'étude des propriétés de la fonction $f(t)$, $t\in[0,\infty[$ au moyen de son image opérationnelle $\bar f(p)$. On établira ici un lien entre le comportement de la fonction et celui de son image opérationnelle au voisinage des points 0 et ∞.

Soit $f(t)\in S$ et $\bar f(p)=p\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-pt}\,dt$ son image opérationnelle.

On a les théorèmes suivants.

Théorème 2. *Si existe* $\lim\limits_{t\to+0} f(t)$, *alors existe* $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \bar{f}(\sigma)$ *et*

$$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{\sigma\to\infty} \bar{f}(\sigma).$$

Théorème 3. *Si existe* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, *alors existe* $\lim\limits_{\sigma\to+0} \bar{f}(\sigma)$ *et*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{\sigma\to+0} \bar{f}(\sigma).$$

Démonstration des théorèmes 2 et 3. Par hypothèse, existe un $\sigma_0 > 0$ tel que l'intégrale $p\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = \bar{f}(p)$ est absolument convergente pour tous les $\sigma \geqslant \sigma_0$, $p = \sigma + i\tau$. Supposons qu'existe $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = f(+0)$ et $\operatorname{Re} p = \sigma \geqslant \sigma_0$. Choisissons un $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(+0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Etudions la différence

$$\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt - f(+0) = \sigma\int_0^\infty [f(t) - f(+0)]\,e^{-\sigma t}\,dt =$$

$$= \sigma\int_0^\delta [f(t) - f(+0)]\,e^{-\sigma t}\,dt + \sigma\int_\delta^\infty [f(t) - f(+0)]\,e^{-\sigma t}\,dt =$$

$$= \sigma\int_0^\delta [f(t) - f(+0)]\,e^{-\sigma t}\,dt + \sigma e^{-\delta\sigma}\int_0^\infty [f(\xi+\delta) - f(+0)]\,e^{-\sigma\xi}\,d\xi.$$

La convergence absolue de la dernière intégrale entraîne que lorsque $\sigma \to \infty$ l'intégrale

$$\int_0^\infty [f(\xi+\delta) - f(+0)]\,e^{-\sigma\xi}\,d\xi$$

est bornée et de plus $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \sigma e^{-\delta\sigma} = 0$, donc à $\delta > 0$ fixe on peut toujours exhiber un N tel que pour tous les $\sigma > N$ l'on ait

$$\left|\sigma e^{-\delta\sigma}\int_0^\infty [f(\xi+\delta) - f(+0)]\,e^{-\sigma\xi}\,d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tous les $\sigma > N$ on aura alors

$$\left|\sigma\int_0^\infty f(t)\,e^{-\sigma t}\,dt - f(+0)\right| \leqslant \sigma\int_0^\delta \frac{\varepsilon}{2}\,e^{-\sigma t}\,dt + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

La démonstration du théorème 3 se fait par analogie. Par hypothèse, il existe un N tel que $|f(t) - f(+\infty)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous les $t > N$. L'égalité

$$\sigma \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt - f(+\infty) = \sigma \int_0^N [f(t) - f(+\infty)] e^{-\sigma t} dt + \\ + \sigma \int_N^\infty [f(t) - f(+\infty)] e^{-\sigma t} dt$$

entraîne

$$\left| \sigma \int_0^\infty [f(t) e^{-\sigma t} - f(+\infty)] dt \right| \leqslant \sigma \int_0^N |f(t) - f(+\infty)| dt + \\ + \sigma \int_N^\infty \frac{\varepsilon}{2} e^{-\sigma t} dt \leqslant \sigma \int_0^N |f(t) - f(+\infty)| dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons $\delta > 0$ tellement petit que pour tous les $\sigma \in]0, \delta]$ l'on ait

$$\sigma \int_0^N |f(t) - f(+\infty)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient alors

$$\left| \sigma \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} dt - f(+\infty) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ pour } \sigma \in]0, \delta]. \blacksquare$$

Sachant l'image opérationnelle $\bar{f}(p)$ de la fonction $f(t)$, on peut, à l'aide des théorèmes 1 et 2, calculer $\lim\limits_{t \to +0} f(t) = f(+0)$ et $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = f(+\infty)$ si bien sûr ces limites existent à priori.

La réciproque n'est pas vraie, i.e. l'existence de $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \bar{f}(\sigma)$ et $\lim\limits_{\sigma \to 0} \bar{f}(\sigma)$ n'entraîne pas généralement celle de $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. En effet, soit $f(t) = \dfrac{\cos \frac{1}{2t}}{\sqrt{\pi t}}$. Il est évident que $f(+0)$ n'existe pas. Par ailleurs $\bar{f}(p) = \sqrt{p}\, e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$. Donc, $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \bar{f}(\sigma) = 0$.

Autre exemple. Posons $f(t) = \sin t$. On constate que $f(+\infty)$ n'existe pas. Mais $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ et $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \bar{f}(\sigma) = 0$.

Enonçons sans le démontrer le théorème suivant.

Théorème 4. *Si une fonction $f(t)$ est minorée, i.e. existent un nombre positif c tel que $f(t)+c>0$ pour tous les $t\geqslant 0$ et l'une des limites*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{\sigma\to+0}\sigma\bar{f}(\sigma),$$

alors existe l'autre limite et

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\lim_{\sigma\to+0}\sigma\bar{f}(\sigma).$$

Un théorème équivalent vaut pour le cas où $T\to 0$ et $\sigma\to\infty$. Le théorème 4 dérive de la théorie générale des théorèmes taubériens [23].

§ 9. Calcul opérationnel pour fonctions à argument entier

1. Fonctions à argument entier. Dans ce paragraphe on étudiera des fonctions à argument entier prenant des valeurs entières positives y compris zéro. Pour appliquer la théorie du calcul opérationnel à de telles fonctions, il est nécessaire de les prolonger à toute la section $[0, \infty[$. Il existe plusieurs méthodes de prolongement. Pour notre part nous ferons appel à la fonction $[t]$ *), i.e. la partie entière de t. Cette fonction est très importante en théorie des nombres.

A toute fonction $f(k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ associons la fonction $f([t])$ définie sur la section $[0, \infty[$. De toute évidence, $f([t]) = f(k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ pour $k\leqslant t<k+1$. Si le graphe de la fonction $f(k)$ est de la forme représentée sur la figure 37, celui de la fonction $f([t])$ sera de la forme représentée sur la figure 38. La fonction $f([t])$ est en escalier et égale à $f(k)$ pour $k\leqslant t<k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ A toute fonction $\varphi(t)$, $t\in[0, \infty[$ on peut faire correspondre une fonction en escalier $\varphi([t])$. Les graphes de ces fonctions sont données sur les figures 39. Dans la suite on écrira simplement $f[t]$ et $\varphi[t]$. De telles fonctions définissent des fonctions à valeurs entières $f(k)$ et $\varphi(k)$. Ces fonctions sont souvent données sous forme d'une suite $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$. On écrit alors $f[t]=\alpha_{[t]}$.

En théorie des nombres il existe d'intéressantes fonctions à valeurs entières, définies pour tout nombre positif entier. Il s'agit de

1) $\tau(n)$, le nombre de diviseurs de n. Ainsi $\tau(3)=2$; $\tau(15)=4$, $\tau(720)=30$;

2) $s(n)$, la somme des diviseurs de n; $s(3)=4$; $s(15)=24$, $s(720)=2418$;

3) $\mu(n)$, la fonction de Möbius; $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$ si n est divisible par le carré d'un nombre différent de l'unité, et $\mu(n)=$

*) $[t]$ est le plus grand entier non supérieur à t.

$= (-1)^k$ dans le cas contraire. k désigne le nombre de diviseurs primaires de n. Par exemple, $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(10) = 1$, etc. On démontre que la somme $\sum_{d/n} \mu(d)$ étendue à tous

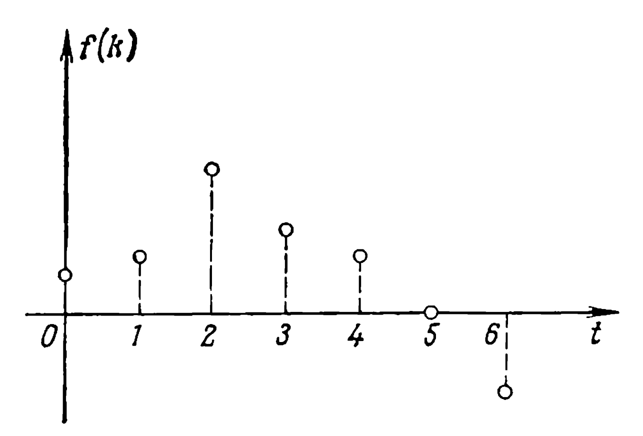


Fig. 37

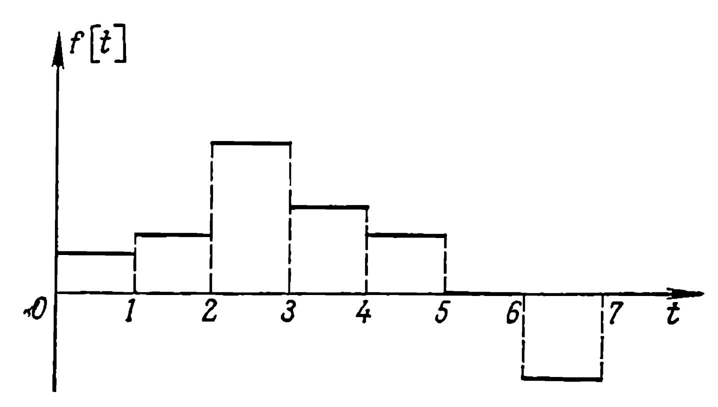


Fig. 38

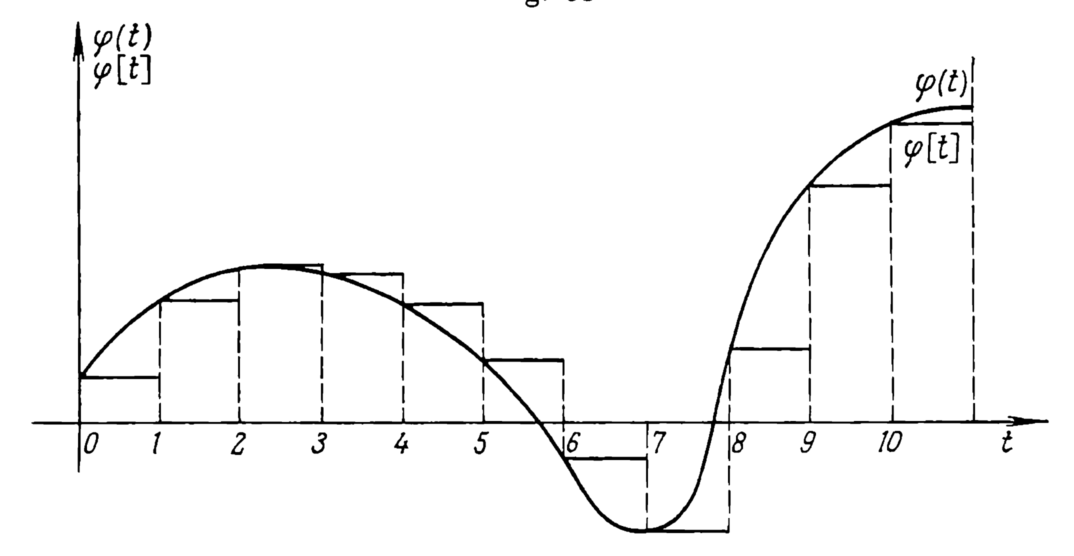


Fig. 39

les diviseurs d de n est nulle si $n > 1$ et égale à l'unité si $n = 1$. Donc, $\sum_{d/n} \mu(d) = 0$ si $n > 1$. Par exemple, $\sum_{d/10} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$;

4) $\varphi(n)$ la quantité de nombres inférieurs à n et simples avec n.

Trouvons l'image opérationnelle de $f[t]$. Compte tenu des propriétés de l'opérateur $e^{-kp} = \eta(t; k)$ on déduit

$$e^{-kp} - e^{-(k+1)p} = \begin{cases} 0, & \text{si } t < k, \\ 1, & \text{si } k \leqslant t < k+1, \\ 0, & \text{si } k+1 \leqslant t, \end{cases}$$

on a donc

$$f[t] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(e^{-kp} - e^{-(k+1)p}),$$

ou

$$f[t] = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, e^{-kp}. \tag{9.1}$$

La série (9.1) est toujours convergente au sens opérationnel. Si p est un nombre complexe, au lieu de (9.1), on aura

$$\int_0^{\infty} f[t]\, e^{-pt}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} p \int_k^{k+1} f[t]\, e^{-pt}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} pf(k) \int_k^{k+1} e^{-pt}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(e^{-kp} - e^{-(k+1)p}) =$$

$$= (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, e^{-kp} = \bar{f}(p)\ ^{*)},$$

$$f[t] = \bar{f}(p) = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, e^{-kp}.$$

Pour assurer la convergence de la série (9.2), il faut imposer à la fonction $f(k)$ des conditions supplémentaires. Il suffit par exemple de supposer que

$$|f(k)| \leqslant Qe^{\gamma k}, \tag{9.3}$$

Q et γ étant des nombres constants pour la fonction donnée $f(k)$.

2. Opérateur des différences progressives ∇ et ses applications. Introduisons la notation

$$1 - e^{-p} = s. \tag{9.4}$$

L'égalité $sf[t] = f[t] - e^{-p}f[t]$ entraîne (cf. (5.73)):

$$sf[t] = \begin{cases} f[t] - f[t-1] & \text{pour } t \geqslant 1, \\ f(0) & \text{pour } t \in [0, t[. \end{cases} \tag{9.5}$$

---

*) On n'introduit pas ici de notation spéciale pour désigner la transformation de Laplace-Carson pour les fonctions en escalier.

On supposera que $f(k)$ est définie au point $k = -1$. Si $f(-1) = 0$, l'égalité (9.5) s'écrit

$$sf[t] = f[t] - f[t-1], \quad f(-1) = 0. \tag{9.6}$$

La formule (9.1) peut se mettre sous la forme

$$f[t] = s \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-kp} = \bar{f}(p). \tag{9.7}$$

Supposons que

$$g[t] = s \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{-kp} = \bar{g}(p),$$

alors en désignant par s^{-1} l'opérateur $\frac{1}{s}$ inverse de s, on aura

$$s^{-1} f(p) \bar{g}(p) = s \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-kp} \sum_{m=0}^{\infty} g(m) e^{-mp} =$$

$$= s \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} \sum_{k+m=n}^{\infty} f(k) g(m).$$

Comparant cette égalité avec (9.7) on déduit

$$s^{-1} \bar{f}(p) \bar{g}(p) = \sum_{k+m=[t]} f(k) g(m) = \sum_{k=0}^{[t]} f([t]-k) g(k),$$

ou

$$\bar{f}(p) \bar{g}(p) = s \sum_{k=0}^{[t]} f([t]-k) g(k) = s \sum_{k=0}^{[t]} f(k) g([t]-k). \tag{9.8}$$

La formule (9.8) sert au calcul du produit de fonctions d'un argument entier

$$f[t] * g[t] = s \sum_{k=0}^{[t]} f([t]-k) g(k). \tag{9.9}$$

De (9.7) il vient

$$s^{-1} f[t] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-kp} = \sum_{k \leq t} f(k),$$

ou

$$s^{-1} f[t] = \sum_{k=0}^{[t]} f(k). \tag{9.10}$$

Donc, l'opérateur s^{-1} désigne la sommation. En particulier, lorsque $f[t] \equiv 1$ il résulte de (9.10)

$$\frac{1}{s} = [t+1].$$

Calculons l'opérateur $\frac{1}{s^n}$. Considérons à cet effet les puissances factorielles

$$t^{(0)}=1,\ t^{(k)}=t\,(t+1)\,(t+2)\ldots(t+k-1). \tag{9.11}$$

Calculons $s\,[t]^{(n)}$. Comme $t^{(n)}=0$ pour $t=-1$ et $n\geqslant 2$, il vient de (9.6) pour $n>1$

$$\begin{aligned} s\,[t]^{(n)} &= [t]^{(n)} - [t-1]^{(n)} = [t]\,([t]+1)\,([t]+2)\ldots \\ &\ldots([t]+n-1) - [t-1]\,([t-1]+1)\,([t-1]+2)\ldots \\ &\ldots([t-1]+n-1) = [t]\,([t]+1)\ldots([t]+n-1) - \\ &-([t]-1)\,[t]\,([t]+1)\ldots([t]+n-2) = [t]\,([t]+1)\ldots \\ &\ldots([t]+n-2)\,\{[t]+n-1-[t]+1\} = n\,[t]^{(n-1)}\,; \end{aligned}$$

$$s\,[t]^{(n)} = n\,[t]^{(n-1)}. \tag{9.12}$$

Une application successive de cette formule donne

$$s^{n-1}\,[t]^{(n)}=n\,!\,[t].$$

La dernière formule a été déduite sous l'hypothèse que $n>1$. Elle est valable visiblement pour $n=1$. Compte tenu de

$$[t]=s\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-kp}=s\,\frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}=\frac{e^{-p}}{s}\,,$$

on obtient

$$s^{n-1}\,[t]^{(n)}=n\,!\,\frac{e^{-p}}{s},$$

ou

$$s^n\,[t]^n=n\,!e^{-p}\,;$$

d'où

$$\frac{e^{-p}}{s^n}=\frac{[t]^{(n)}}{n\,!}\,,$$

ou, enfin (cf. (5.73))

$$\frac{1}{s^n}=\frac{e^p\,[t]^{(n)}}{n\,!}=\frac{e^pe^{-p}\,[t+1]^{(n)}}{n\,!}\,,$$

i.e.

$$\frac{1}{s^n}=\frac{[t+1]^n}{n\,!}=\frac{[t+1]\,[t+2]\ldots[t+n]}{n}. \tag{9.13}$$

De (9.13) et (9.9), il vient

$$\frac{1}{s^n}\,f\,[t]=s\sum_{k=0}^{[t]}\frac{[t+1-k]^{(n)}}{n\,!}\,f\,(k), \tag{9.14}$$

ou

$$\frac{1}{s^{n+1}}\,f\,[t]=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{[t+1-k]^{(n)}}{n\,!}\,f\,(k). \tag{9.15}$$

Au premier membre on a une $(n + 1)$-uple somme. Exprimons-la en fonction d'une somme simple:

$$\sum_{k_n=0}^{[t]} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{k=0}^{k_1} f(k) = \sum_{k=0}^{[t]} \frac{[t+1-k]^{(n)}}{n!} f(k).$$

La formule (9.13) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n [t+1]^{(n)}}{n!};$$

ou

$$\frac{s}{s-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n ([t]+1)([t]+2)\ldots([t]+n)}{1\cdot 2\cdot\ldots n}. \tag{9.16}$$

Pour déterminer le domaine de convergence de la série factorielle (9.16), on remarquera que

$$\frac{([t]+1)([t]+2)\ldots([t]+n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{\Gamma(n+1+[t])}{\Gamma(n+1)\,\Gamma([t]+1)},$$

où $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ est la fonction gamma. Considérons la formule asymptotique de $\Gamma(x)$ pour les grands x

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}(1+\varepsilon),$$

où $\varepsilon \to 0$ lorsque $x \to \infty$ *). Pour les grands n, on aura alors

$$\frac{\Gamma(n+1+[t])}{\Gamma(n+1)} = \frac{(n+1+[t])^{n+[t]+\frac{1}{2}} e^{-(n+1+[t])}(1+\varepsilon)}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-(n+1)}(1+\varepsilon)} =$$

$$= \left(1+\frac{[t]}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{[t]}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} (n+1+[t])^{[t]} e^{-[t]}(1+\varepsilon).$$

Or lorsque $n \to \infty$,

$$\left(1+\frac{[t]}{n+1}\right)^{n+1} \to e^{[t]} \text{ et } \left(1+\frac{[t]}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \to 1,$$

donc

$$\frac{\Gamma(n+1+[t])}{\Gamma(n+1)} = (n+1+[t])^{[t]}(1+\varepsilon) =$$

$$= (n+1)^{[t]} \left(1+\frac{[t]}{n+1}\right)^{[t]} (1+\varepsilon),$$

---

*) Plus exactement $\varepsilon = O\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to \infty$.

ou

$$\frac{\Gamma(n+1+[t])}{\Gamma(n+1)} = (n+1)^{[t]}(1+\varepsilon). \tag{9.17}$$

D'où l'on conclut que la série (9.16) sera convergente pour $|\lambda| < 1$. En vertu de (9.17) on aura, en effet,

$$\left|\frac{\lambda^n [t+1]^{(n)}}{n!}\right| \leqslant Q(n+1)^{[t]} |\lambda|^n,$$

où Q est un nombre. Mais la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n (n+1)^k$ est convergente pour tous les k lorsque $|\lambda| < 1$. Il est aisé de vérifier que pour $|\lambda| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n ([t]+1)([t]+2)\ldots([t]+n)}{1\cdot 2\ldots n} = (1-\lambda)^{-([t]+1)},$$

donc

$$\frac{s}{s-\lambda} = (1-\lambda)^{-[t+1]}. \tag{9.18}$$

En dérivant (9.18) par rapport à λ, on trouve

$$\frac{s}{(s-\lambda)^{k+1}} = \frac{[t+1]([t+1]+1)\ldots([t+1]+(k-1))(1-\lambda)^{-[t+1]-k}}{k!},$$

ou

$$\frac{s}{(s-\lambda)^{k+1}} = \frac{[t+1]\ldots[t+k]}{k!}(1-\lambda)^{-[t+1+k]}, \quad |\lambda| < 1. \tag{9.19}$$

R e m a r q u e. La condition $|\lambda| < 1$ n'est pas essentielle, dans la suite on la remplacera par $\lambda \neq 1$ (cf. (9.24)). Si l'on fait appel à l'image opérationnelle de la fonction $e^{\lambda[t]}$, on peut obtenir des formules qui dans nombre de cas seront plus commodes que (9.18) et (9.19). De (9.7) il vient

$$e^{\lambda[t]} = (1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(p-\lambda)k} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-(p-\lambda)}},$$

ou

$$e^{\lambda[t]} = \frac{e^p-1}{e^p-e^{\lambda}}. \tag{9.20}$$

En dérivant par rapport à λ, on obtient

$$[t]\, e^{\lambda[t]} = \frac{(e^p-1)\, e^{\lambda}}{(e^p-e^{\lambda})^2} \quad \text{ou} \quad [t]\, e^{\lambda([t]-1)} = \frac{e^p-1}{(e^p-e^{\lambda})^2}.$$

Par analogie on a

$$[t]([t]-1)\ldots([t]-k+1)e^{\lambda([t]-k)} = \frac{k!(e^p-1)}{(e^p-e^{\lambda})^{k+1}}$$

ou

$$\frac{e^p-1}{(e^p-e^{\lambda})^{k+1}}=\frac{[t]([t]-1)\dots([t]-k+1)}{k!}e^{\lambda[t-k]}. \qquad (9.21)$$

On utilisera les formules (9.20) et (9.21) pour résoudre des équations aux différences.

Soit $f(t)$ une fonction définie pour tous les t. L'expression $f(t) - f(t-1)$ s'appelle *différence progressive du premier ordre*. On notera cette opération par le symbole ∇ :

$$\nabla f(t) = f[t] - f[t-1].$$

La différence $\nabla^n f[t]$ est donnée par l'égalité

$$\nabla^n f[t] = \nabla(\nabla^{n-1} f[t]).$$

Ainsi,

$$\nabla^2 f[t] = f[t] - f[t-1] - \{f[t-1] - f[t-2]\} = \\ = f[t] - 2f[t-1] + f[t-2]$$

$$\nabla^3 f[t] = f[t] - 3f[t-1] + 3f[t-2] - f[t-3].$$

En raisonnant par récurrence on démontre sans peine que

$$\nabla^n f[t] = f[t] - nf[t-1] + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} f[t-2] - \dots + (-1)^n f[t-n];$$

$$\nabla^n f[t] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f[t-k]. \qquad (9.22)$$

Etablissons les formules qui expriment $\nabla^n f[t]$ en fonction de s. Lorsque $f(-1) = 0$, on a (cf. (9.6))

$$sf[t] = f[t] - f[t-1] = \nabla f[t].$$

Donc, dans le cas général

$$s(f[t] - f[-1]) = \nabla f[t]. \qquad (9.23)$$

On peut se servir de cette équation pour généraliser les formules (9.18) et (9.19) à tous les $\lambda \neq 1$, i.e. lever la condition $|\lambda| < 1$. Posons $f[t] = (1-\lambda)^{-[t+1]} - 1$ dans (9.23). De toute évidence, $f(-1) = 0$, donc

$$s[(1-\lambda)^{-[t+1]} - 1] = \nabla\{(1-\lambda)^{-[t+1]} - 1\} = \\ = (1-\lambda)^{-[t+1]} - (1-\lambda)^{-[t]} = (1-\lambda)^{-[t+1]} - \\ - (1-\lambda)(1-\lambda)^{-[t+1]},$$

ou

$$s(1-\lambda)^{-[t+1]} - s = (1-\lambda)^{-[t+1]}(1-1+\lambda),$$

ou encore

$$(s-\lambda)(1-\lambda)^{-[t+1]} = s,$$

d'où

$$\frac{s}{s-\lambda}=(1-\lambda)^{-[t+1]}, \qquad \lambda\neq 1. \tag{9.24}$$

Soit $f[t]=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,e^{-kp}=\bar{f}(p)$. Exprimons l'image opérationnelle des fonctions $f[t\lambda]$ et $f(t+n]$ par l'intermédiaire de $\bar{f}(p)$, où λ est un nombre réel positif et n un entier positif. On a $f[t\lambda]=f(k)$, pour $t\in\left[\frac{k}{\lambda},\ \frac{k+1}{\lambda}\right[$. Donc (cf. (9.7)),

$$f[t\lambda]=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,(e^{-\frac{pk}{\lambda}}-e^{-\frac{p(k+1)}{\lambda}})=(1-e^{-\frac{p}{\lambda}})\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\,e^{-\frac{pk}{\lambda}},$$

ou

$$f[t\lambda]=\bar{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{9.25}$$

De (9.1), il vient

$$f[t+n]=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty} f(k+n)\,e^{-pk}=(1-e^{-p})\sum_{\nu=n}^{\infty} f(\nu)\,e^{-p(\nu-n)}=$$

$$=(1-e^{-p})\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\,e^{-p\nu}\cdot e^{pn}-\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\,e^{-p\nu}\cdot e^{pn}\right\}=$$

$$=\left\{e^{pn}\bar{f}(p)-(1-e^{-p})\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\,e^{(n-\nu)p}\right\},$$

i.e.

$$f[t+n]=e^{np}\bar{f}(p)-(1-e^{-p})\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\,e^{(n-\nu)p}. \tag{9.26}$$

Exhibons quelques formules opérationnelles faisant intervenir l'opérateur s. Comme $s=1-e^{-p}$, i.e. $e^{-p}=1-s$ on tire de (9.1)

$$f[t]=s\sum_{k=0}^{\infty}(1-s)^k f(k). \tag{9.27}$$

Posons $f(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$, on a

$$\frac{\lambda^{[t]}}{[t]!}=s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(1-s)\,[\lambda]^k}{k!}=se^{(1-s)\lambda},$$

d'où

$$se^{-s\lambda}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{[t]}}{[t]!}. \tag{9.28}$$

Multipliant la dernière égalité par $f(\lambda)$ et intégrant entre 0 et ∞, on obtient

$$\bar{f}(s)=s\int_0^\infty e^{-s\lambda}f(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{[t]\,!}\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{[t]}f(\lambda)\,d\lambda. \qquad (9.29)$$

Cette formule est valable si l'intégrale du second membre existe. Elle peut être utilisée pour la déduction de formules opérationnelles contenant l'opérateur s. En effet, on reconnaît au premier membre l'expression de la transformée de Laplace-Carson pour laquelle existe d'importantes tables d'intégrales.

Posons $f(\lambda)=\lambda^{\nu}e^{-\mu\lambda}$ dans (9.29). Il vient

$$s\int_0^\infty e^{-(s+\mu)\lambda}\lambda^{\nu}\,d\lambda=\frac{1}{[t]\,!}\int_0^\infty e^{-(1+\mu)\lambda}\lambda^{[t]+\nu}\,d\lambda, \quad \mu>-1,$$

ou

$$\frac{s\Gamma(\nu+1)}{(s+\mu)^{\nu+1}}=\frac{\Gamma([t]+\nu+1)}{[t]\,!\,(1+\mu)^{[t]+\nu+1}}, \quad \mu>-1.$$

ou encore

$$\frac{s}{(s+\mu)^{\nu+1}}=\frac{\Gamma([t]+\nu+1)}{[t]!\,\Gamma(\nu+1)\,(1-\mu)^{[t]+\nu+1}}, \quad \mu>-1. \qquad (9.30)$$

En particulier, de (9.30) il vient pour $\mu=0$ et $\nu=n-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{s^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma\left([t]+n-\frac{1}{2}+1\right)}{[t]\,!\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)},$$

or

$$\Gamma\left([t]+n-\frac{1}{2}+1\right)=\left((t)+n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left([t]+n+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left([t]+n-\frac{1}{2}\right)\left([t]+n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

donc

$$\frac{1}{s^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+[t]-\frac{1}{2}\right)}{[t]\,!}. \qquad (9.31)$$

Posant $f(\lambda)=L_n(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$, où $L_n(t)$ — est un polynôme de Laguerre dans (9.29), il vient $s\int_0^\infty e^{-s\lambda}L_n(\lambda)\,d\lambda=\left(1-\frac{1}{s}\right)^n$; or

(cf. (9.13))

$$\left(1-\frac{1}{s}\right)^n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{1}{s^\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{[t+1]^\nu}{\nu!};$$

par ailleurs,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{[t]}L_n(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{n!}\int_0^\infty \lambda^{[t]}\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda^n e^{-\lambda}]\,d\lambda.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{[t]}L_n(\lambda)\,d\lambda=\frac{(-1)^n}{n!}[t]([t]-1)\dots([t]-n+$$

$$+1)\int_0^\infty \lambda^{[t]-n+n}e^{-\lambda}\,d\lambda=\frac{(-1)^n[t]([t]-1)\dots([t]-n+1)}{n!}[t]!$$

Donc,

$$\left(1-\frac{1}{s}\right)^n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{[t+1]^\nu}{\nu!}=\frac{(-1)^n[t]([t]-1)\dots([t]-n+1)}{n!},\tag{9.32}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\left(1-\frac{1}{s}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[t]([t]-1)\dots([t]-n+1)}{n!}\frac{\lambda^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{[t]}\frac{(-1)^n[t]([t]-1)\dots([t]-n+1)}{n!}\frac{\lambda^n}{n!}=L_{[t]}(\lambda);$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\left(1-\frac{1}{s}\right)^n}{n!}=e^{\lambda\left(1-\frac{1}{s}\right)},$$

par conséquent

$$e^{-\frac{\lambda}{s}}=e^{-\lambda}L_{[t]}(\lambda).\tag{9.33}$$

Compte tenu de (9.8), l'égalité $e^{-\frac{\lambda}{s}}e^{-\frac{\mu}{s}}=e^{-\frac{\lambda+\mu}{s}}$ entraîne

$$e^{-(\lambda+\mu)}L_{[t]}(\lambda+\mu)=s\sum_{k=0}^{[t]}e^{-\lambda}L_{[t]-k}(\lambda)\,e^{-\mu}L_k(\mu),$$

ou, puisque l'opérateur $\frac{1}{s}$ désigne la sommation (cf. (9.10))

$$\sum_{k=0}^{[t]}L_k(\lambda+\mu)=\sum_{k=0}^{[t]}L_{[t]-k}(\lambda)\,L_k(\mu).\tag{9.34}$$

L'égalité (9.33) peut à son tour servir à déduire de nouvelles formules. Par exemple, de (9.33) il vient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^\infty e^{-\lambda} L_{[t]}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

or

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{s} \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{s}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi s}.$$

Pour $n = 0$, il vient de (9.31)

$$\sqrt{s} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2[t]-1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots [t]\cdot 2^{[t]}},$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} L_{[t]}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2[t]-1)}{[t]!\, 2^{[t]}} \sqrt{\pi}.$$

Etablissons une nouvelle formule. Posons $f(\lambda) = e^{-\frac{\xi}{\lambda}} \frac{1}{\lambda}$ dans (9.29), on obtient

$$s \int_0^\infty e^{-s\lambda - \frac{\xi}{\lambda}} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{[t]!} \int_0^\infty e^{-\lambda - \frac{\xi}{\lambda}} \lambda^{[t]-1}\, d\lambda.$$

On sait que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda - \frac{\xi}{\lambda}} \lambda^{[t]-1}\, d\lambda = 2\xi^{\frac{[t]}{2}} K_{[t]}(2\sqrt{\xi}),$$

donc

$$sK_0(2\sqrt{s\xi}) = \frac{\xi^{\frac{[t]}{2}} K_{[t]}(2\sqrt{\xi})}{[t]!}. \tag{9.35}$$

Si dans l'intégrale

$$\int_0^\infty K_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)(t^2+z^2)^{-\frac{\nu}{2}} t^{2\mu+1}\, dt =$$

$$= 2^\mu a^{-1-\mu} z^{1+\mu-\nu} \Gamma(1+\mu) K_{\nu-\mu-1}(az),$$

$$\operatorname{Re}\mu > -1, \quad a > 0,$$

on fait le changement de variables $t^2 + z^2 = \xi$, $2tdt = d\xi$, l'on pose $z^2 = \lambda$, $a = 2\sqrt{\alpha}$, et l'on tienne compte de l'égalité $K_\nu(z) =$

$= K_{-\nu}(z)$, on obtient

$$\int_\lambda^\infty K_\nu(2\sqrt{\alpha\xi})\,\xi^{\frac{\nu}{2}}(\xi-\lambda)^\mu d\xi =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1+\mu}{2}} \lambda^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu+\mu+1}(2\sqrt{\lambda\alpha})\,\Gamma(1+\mu). \qquad (9.36)$$

De (9.35), l'on déduit

$$s\int_\lambda^\infty K_0(2\sqrt{s\xi})\,(\xi-\lambda)^\mu\, d\xi = \frac{1}{[t]\,!}\int_\lambda^\infty K_{[t]}(2\sqrt{\xi})\,\xi^{\frac{[t]}{2}}(\xi-\lambda)^\mu\, d\xi.$$

De (9.36) il vient

$$\Gamma(1+\mu)\, s\left(\frac{\lambda}{s}\right)^{\frac{1+\mu}{2}} K_{1+\mu}(2\sqrt{\lambda s}) =$$

$$= \frac{\lambda^{\frac{[t]}{2}}}{[t]\,!}\left(\frac{\lambda}{1}\right)^{\frac{1+\mu}{2}} K_{[t]+\mu+1}(2\sqrt{\lambda})\,\Gamma(1+\mu),$$

d'où

$$\frac{1}{s^{\frac{\mu-1}{2}}} K_{1+\mu}(2\sqrt{\lambda s}) = \frac{\lambda^{\frac{[t]}{2}}}{[t]\,!} K_{[t]+1+\mu}(2\sqrt{\lambda}). \qquad (9.37)$$

De toute évidence cette formule s'identifie à (9.35) pour $\mu = -1$. En particulier, si $\mu = -\frac{1}{2}$ dans (9.37), on obtient

$$s^{\frac{3}{4}} K_{\frac{1}{2}}(2\sqrt{\lambda s}) = \frac{\lambda^{\frac{[t]}{2}}}{[t]\,!} K_{[t]+\frac{1}{2}}(2\sqrt{\lambda}),$$

or

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n+1+k)}{k\,!\,\Gamma(n+1-k)}\frac{1}{(2z)^k},$$

donc

$$\sqrt{s}\, e^{-2\sqrt{\lambda s}} = \frac{\lambda^{\frac{[t]}{2}}}{[t]\,!} e^{-2\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{[t]}\frac{\Gamma([t]+1+k)}{k\,!\,\Gamma([t]+1-k)}\frac{1}{(4\sqrt{\lambda})^k},$$

ou en posant $2\sqrt{\lambda} = \xi$, on a $\sqrt{\lambda} = \frac{\xi}{2}$, $(\sqrt{\lambda})^{[t]} = \lambda^{\frac{[t]}{2}} = \xi^{[t]}2^{-[t]}$ et

$$\sqrt{s}\, e^{-\xi\sqrt{s}} = \frac{2^{-[t]}\xi^{[t]}}{[t]\,!} e^{-\xi}\sum_{k=0}^{[t]}\frac{\Gamma([t]+1+k)}{k\,!\,\Gamma([t]+1-k)}\frac{1}{2^k\xi^k},$$

ou

$$\sqrt{s}\, e^{-\xi\sqrt{s}} = \frac{e^{-\xi}}{[t]\,!} \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\Gamma([t]+1+k)}{k\,!\,\Gamma([t]+1-k)}\, 2^{-([t]+k)} \xi^{([t]-k)}. \tag{9.38}$$

En intégrant cette égalité sur ξ entre 0 et ∞, on obtient

$$1 = \frac{1}{[t]\,!} \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\Gamma([t]+1+k)}{k\,!\,2^{[t]+k}},$$

d'où l'on déduit en posant $t = n$ pour tout n

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)\,!}{k\,!\,2^{k}} = 2^{n} n\,!$$

Si l'on multiplie (9.38) par $e^{-\lambda\xi}$ et qu'on intègre sur ξ, on obtient

$$\sqrt{s} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\sqrt{s})\xi}\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\Gamma(]t]+1+k)\, 2^{-([t]+k)}}{k\,!\,\Gamma([t]+1-k)\,[t]\,!} \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)\xi} \xi^{[t]-k}\, d\xi,$$

ou

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\lambda} = \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\Gamma([t]+1+k)\, 2^{-[t]-k}\, \Gamma([t]+1-k)}{[t]\,!\,k\,!\,\Gamma([t]+1-k)\,(1+\lambda)^{[t]+1-k}},$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\lambda} \sum_{k=0}^{[t]} \frac{\Gamma([t]+1+k)}{k\,!\,[t]\,!} \; \frac{2^{-[t]-k}}{(1+\lambda)^{[t]-k+1}}, \tag{9.39}$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\lambda} = \frac{1}{1+\dfrac{\lambda}{\sqrt{s}}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{s^{\nu/2}}.$$

Mais de (9.30), il vient

$$\frac{1}{s^{\nu/2}} = \frac{\Gamma\left([t]+\frac{\nu}{2}+1\right)}{[t]\,!\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} = \frac{\left([t]+\frac{\nu}{2}\right)\left([t]+\frac{\nu}{2}-1\right)\cdots\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{[t]\,!};$$

$$\frac{1}{s^{\nu/2}} = \frac{\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\left(2+\frac{\nu}{2}\right)\cdots\left([t]+\frac{\nu}{2}\right)}{[t]\,!}.$$

Donc, lorsque $|\lambda|<1$, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\left(2+\frac{\nu}{2}\right)\ldots\left([t]+\frac{\nu}{2}\right)\lambda^{\nu}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-\lambda)^{\nu}\frac{(2+\nu)(2\cdot 2+\nu)\ldots(2[t]+\nu)}{2^{[t]}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{\Gamma([t]+1+k)}{k!\,(1+\lambda)^{[t]-k+1}}\,\frac{1}{2^{k+[t]}},$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(2+n)(2\cdot 2+n)\ldots(2[t]+n)\lambda^{n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{\Gamma([t]+k+1)}{k!\,(1+\lambda)^{[t]+1-k}2^{k}}. \qquad (9.40)$$

En substituant m à t dans cette formule, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(2+k)(2\cdot 2+k)\ldots(2m+k)\lambda^{k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!}{k!2^{k}}\,\frac{1}{(1-\lambda)^{m+1-k}}$$

Si l'on pose $-\lambda=1-s$, où $s=1-e^{-p}$, on obtient

$$s\sum_{k=0}^{\infty}(2+k)(2\cdot 2+k)\ldots(2m+k)(1-s)^{k}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!}{k!2^{k}}\,\frac{1}{s^{m-k}}.$$

Comparant avec (9.27), il vient

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!}{2^{k}k!\,s^{m-k}}=(2+[t])(2\cdot 2+[t])\ldots(2m+[t]), \qquad (9.41)$$

ou, compte tenu de (9.13),

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+k)!\,[t+1]^{(m-k)}}{2^{k}k!\,[m-k]!}= \quad +[t])(2\cdot 2+[t])\ldots(2m+[t(). \qquad (9.42)$$

La formule (9.33) peut être établie de façon analogue à partir de la fonction génératrice pour les polynômes de Laguerre. On sait que (cf. [15])

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_{k}^{(\alpha)}(\lambda)\,z^{k}=\frac{e^{-\frac{\lambda z}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}},\quad |z|<1. \qquad (9.43)$$

Utilisons cette égalité pour généraliser (9.33) aux polynômes $I_k^\alpha(\lambda)$, $\alpha > -1$. Dans (9.43), remplaçons z par $1 - s$, où $s = 1 - e^{-p}$ cf. (9.4)). On aura dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(\alpha)}(\lambda)(1-s)^k = \frac{e^{-\lambda\frac{1-s}{s}}}{s^{1+\alpha}},$$

(ou

$$s\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} L_k^{(\alpha)}(\lambda)(1-s)^k = \frac{1}{s^\alpha} e^{-\frac{\lambda}{s}}.$$

Une comparaison de la dernière égalité avec la formule (9.27) donne immédiatement

$$\frac{1}{s^\alpha} e^{-\frac{\lambda}{s}} = e^{-\lambda} L_{[t]}^{(\alpha)}(\lambda). \tag{9.44}$$

De façon analogue, on pourrait établir de nombreuses formules similaires à (9.44). Compte tenu de

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\Theta) z^k = \frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\Theta+z^2}}, \quad |z| < 1$$

et en posant $z = 1 - s$, on obtient

$$\frac{s}{\sqrt{(1-s)^2 - 2(1-s)\cos\Theta + 1}} = P_{[t]}(\cos\Theta),$$

ou

$$\frac{s}{\sqrt{\left(s - 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \sin^2\Theta}} = P_{[t]}(\cos\Theta). \tag{9.45}$$

De façon analogue, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\Theta) z^k = \frac{z\sin\Theta}{1-2z\cos\Theta+z^2}, \quad |z| < 1$$

entraîne

$$\frac{(1-s)s\sin\Theta}{\left(s-2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \sin^2\Theta} = \sin\Theta[t].$$

Or $1 - s = e^{-p}$ et, de plus, $e^p \sin\Theta[t] = \sin\Theta[t+1]$, ceci découle de l'égalité $\sin\Theta[t] = 0$ pour $0 \leqslant t < 1$ (cf. (6.24)), donc

$$\frac{s}{\left(s-2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)^2 + \sin^2\Theta} = \frac{\sin\Theta[t+1]}{\sin\Theta}. \tag{9.46}$$

De (9.45), (9.46) et (9.9) il vient

$$\frac{\sin \Theta [t+1]}{\sin \Theta} = \sum_{k=0}^{[t]} P_{[t]-k} (\cos \Theta) P_k (\cos \Theta).$$

S'agissant des polynômes de Tchebychev, en se servant de

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n (\lambda) z^n = \frac{1-z^2}{2(1-2\lambda z+z)^2},$$

comme précédemment, on obtient

$$\frac{s^2 (2-s)}{2[(s-(1-\lambda)^2+1-\lambda^2]} = T_{[t]} (\lambda), \quad t \geqslant 1. \tag{9.47}$$

On sait que les *polynômes de Bernoulli* $B_n (\lambda)$ sont définis par

$$\frac{ze^{\lambda z}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\lambda) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi,$$

$B_n = B_n (0)$ sont les *nombres de Bernoulli*. En posant $z = 1 - s$, on obtient

$$\frac{s(1-s) e^{-\lambda s}}{e^{1-s}-1} = s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (\lambda) e^{-\lambda}}{n!} (1-s)^n,$$

d'où

$$\frac{s(1-s) e^{-\lambda s}}{e^{1-s}-1} = \frac{B_{[t]} (\lambda) e^{-\lambda}}{[t]!}. \tag{9.48}$$

En multipliant (9.48) par $se^{-\mu s} = \frac{\mu^{[t]} e^{-\mu}}{[t]!}$, il vient

$$\frac{s(1-s) e^{-(\lambda+\mu)s}}{e^{1-s}-1} = \sum_{k=0}^{[t]} \frac{B_{[t]-k} (\lambda) \mu^k e^{-\lambda-\mu}}{([t]-k)!\, k!},$$

ou

$$B_{[t]} (\lambda+\mu) = \sum_{k=0}^{[t]} \binom{[t]}{k} B_{[t]-k} (\lambda) \mu^k. \tag{9.49}$$

Démontrons maintenant quelques propriétés des polynômes de Bernoulli. De (9.48), l'on déduit

$$\frac{B_{[t]} (\lambda)}{[t]!} = \frac{s(1-s) e^{\lambda(1-s)}}{e^{1-s}-1}, \tag{9.50}$$

$$\frac{1}{[t]!} \int_x^{x+1} B_{[t]} (\lambda)\, d\lambda = \frac{s\,(e^{(1+x)(1-s)} - e^{x(1-s)})}{e^{1-s}-1} = se^{(1-s)x}, \tag{9.51}$$

compte tenu de (9.28), il vient

$$\int_x^{x+1} B_{[t]}(\lambda)\, d\lambda = x^{[t]},$$

ou

$$\int_x^{x+1} B_n(\lambda)\, d\lambda = x^n. \tag{9.52}$$

La dernière égalité entraîne

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{9.53}$$

On obtient une autre expression pour les polynômes $B_n(x)$ par dérivation de (9.50) par rapport à λ:

$$\frac{B'_{[t]}(\lambda)}{[t]!} = (1-s)\frac{s(1-s)\, e^{\lambda(1-s)}}{e^{1-s}-1} = (1-s)\frac{B_{[t]}(x)}{[t]!} = e^{-p}\frac{B_{[t]}(\lambda)}{[t]!} = \frac{B_{[t-1]}(\lambda)}{[t-1]!};$$

donc

$$B'_{[t]}(\lambda) = [t]\, B_{[t]-1}(\lambda),$$

ou

$$B'_n(\lambda) = nB_{n-1}(\lambda), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9.54}$$

L'exposé de ce paragraphe pourrait être considéré comme le calcul opérationnel pour les fonctions de la forme $f[t] \equiv f([t])$. On obtiendrait un autre exemple identique en envisageant l'ensemble des fonctions de la forme $f([e^t])$, où $f(t)$ est définie quel que soit $t \in [1, \infty[$. Si l'intégrale de Laplace-Carson existe pour la fonction $f(e^t)$, on obtient

$$p\int_0^{\infty} f([e^t])\, e^{-pt}\, dt = p\int_1^{\infty} f([x])\frac{dx}{x^{1+p}} = \sum_{n=1}^{\infty} p\int_n^{n+1} f(n)\frac{dx}{x^{1+p}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\right) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(n)-f(n-1)}{n^p}.$$

De façon analogue, la fonction $f([e^t])$ admet l'image opérationnelle

$$f([e^t]) = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(n)-f(n-1)}{n^p}. \tag{9.55}$$

Posons $f(n) - f(n-1) = a_n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ et $a_1 = f(1)$; il vient

$$f([t]) = \sum_{k=1}^{[t]} a_k \tag{9.56}$$

et

$$f([e^t]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{k=1}^{[e^t]} a_k. \tag{9.57}$$

Les séries (9.57) sont appelées *séries de Dirichlet*. Si le paramètre p est considéré comme un opérateur, la série (9.57) sera toujours convergente et sa somme, visiblement égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} = \sum_{k=1}^{[e^t]} a_k. \tag{9.58}$$

La dernière égalité entraîne en particulier

$$[e^t] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p), \tag{9.59}$$

où $\zeta(p)$ est la fonction dzéta de Riemann.

Si l'on pose $a_k = \mu(k)$, où $\mu(k)$ est la fonction de Möbius, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^p} = \sum_{k=1}^{[e^t]} \mu(k) = M(e^t),$$

où $M(x) = \sum_{k=1}^{[x]} \mu(k)$. On sait que lorsque $\operatorname{Re} p > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^p}$ est convergente et sa somme égale à $\frac{1}{\zeta(p)}$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^p} = \frac{1}{\zeta(p)} = \sum_{k=1}^{[e^t]} \mu(k) = M(e^t). \tag{9.60}$$

Il est standard par ailleurs [22] que lorsque $\operatorname{Re} p > 1$, on a

$$\frac{\zeta(p)}{\zeta(2p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^p} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

donc

$$\frac{\zeta(p)}{\zeta(2p)} = \sum_{n=1}^{[e^t]} |\mu(n)| \tag{9.61}$$

et

$$\frac{\zeta(p-1)}{\zeta(p)} = \sum_{n=1}^{[e^t]} \varphi(n). \tag{9.62}$$

Soit $\Phi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$, il vient (cf. (5.73))

$$\Phi(p)\, g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-p \ln n} g(t) = \sum_{\ln n \leqslant t} a_n g(t - \ln n),$$

où la sommation est étendue à tous les n entiers tels que $\ln n \leqslant t$. Donc,

$$\Phi(p)\, g(t) = \sum_{n=1}^{[e^t]} a_n g(t - \ln n). \tag{9.63}$$

Par souci de simplicité, on écrira $f[e^t]$ au lieu de $f([e^t])$.

Soit

$$f[e^t] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p} \quad \text{et} \quad g[e^t] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^p},$$

il vient

$$f[e^t] * g[e^t] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_k b_m}{(km)^p}$$

ou

$$f[e^t] * g[e^t[= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^p}, \tag{9.64}$$

où

$$c_n = \sum_{k/n} a_k b_{\frac{n}{k}}. \tag{9.65}$$

k/n signifie que k est un diviseur de n et $\sum_{k/n}$ que la sommation est étendue à tous les diviseurs de n.

De (9.64) il suit que l'ensemble des fonctions de la forme $f[e^t]$ constitue dans $\mathfrak{M}$ un anneau que nous noterons D. De toute évidence, toute fonction de D est une fonction en escalier qui reste constante sur les intervalles

$$\ln k < t < \ln(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

De (9.59) et (9.64), il vient

$$[e^t] * [e^t] = \zeta^2(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^p}; \tag{9.66}$$

pour le produit de k facteurs, on a

$$[e^t] * [e^t] * \ldots * [e^t] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^p} = \zeta^k(p). \qquad (9.67)$$

Ici $\tau_k(n)$ est le nombre de représentations du nombre n par un produit de k facteurs (les produits constitués des mêmes facteurs, mais disposés dans un ordre différent, sont considérés comme différents). On remarquera que $\tau_k(1) = 1$ pour tous les k.

Exemples. 1. Montrer que

$$\zeta(p-r) = \int_1^{[e^t]+1} B_r(\xi)\, d\xi. \qquad (9.68)$$

On a (cf. (9.57))

$$\zeta(p-r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n^p} = \sum_{n=1}^{[e^t]} n^r.$$

Compte tenu de (9.52) il vient

$$\zeta(p-r) = \sum_{n=1}^{[e^t]} \int_n^{n+1} B_r(\xi)\, d\xi = \int_1^{[e^t]+1} B_r(\xi)\, d\xi.$$

(9.52) entraîne

$$B_r(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} B_k(x).$$

(9.54) entraîne

$$\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} B_k(x) = r x^{r-1},$$

donc de (9.68) il suit

$$\sum_{k=0}^{r-1} \zeta(p-k) \binom{r}{k} = \int_1^{[e^t]+1} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} B_k(\xi)\, d\xi = \int_1^{[e^t]+1} r\xi^{r-1} d\xi;$$

et

$$\sum_{k=0}^{r-1} \zeta(p-k) \binom{r}{k} = ([e^t]) + 1)^r - 1. \qquad (9.69)$$

On aurait d'ailleurs pu déduire cette formule en calculant directement $\sum_{n=1}^{n\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} n^k$ et en se servant de la formule (9.55).

2. Trouver l'image opérationnelle de la fonction $\{e^t\}$ ($\{x\}$ est la partie fractionnaire de x).

De toute évidence, $\{e^t\} = e^t - [e^t]$ d'où (cf. (9.59)) il vient

$$\{e^t\} = \frac{p}{p-1} - \zeta(p). \tag{9.70}$$

3. Trouver l'image opérationnelle de la fonction $\{e^t\}^2$.

On a

$$\{e^t\}^2 = e^{2t} - 2e^t [e^t] + [e^t]^2 ;$$

or (cf. (9.69)) $([e^t]+1)^2 = \zeta(p) + 2\zeta(p-1) + 1$, donc $[e^t]^2 = \zeta(p) + 2\zeta(p-1) - 2\zeta(p) = 2\zeta(p-1) - \zeta(p)$ et

$$\{e^t\}^2 = \frac{p}{p-2} - \frac{2p}{p-1}\zeta(p-1) + 2\zeta(p-1) - \zeta(p),$$

ou

$$\{e^t\}^2 = \frac{p}{p-2} + \frac{2\zeta(p-1)}{p-1} - \zeta(p). \tag{9.71}$$

4. Trouver l'image opérationnelle des fonctions $[\lambda e^t]$ et $\{\lambda e^t\}$. On a

$$[\lambda e^t] = [e^{t+\ln\lambda}] = p\int_0^\infty [e^{t+\ln\lambda}]\, e^{-pt}\, dt = p\int_{\ln\lambda}^\infty [e^\xi]\, e^{-p(\xi-\ln\lambda)}\, d\xi =$$

$$= \lambda^p p\int_0^\infty [e^\xi]\, e^{-p\xi}\, d\xi + p\lambda^p \int_{\ln\lambda}^0 [e^\xi]\, e^{-p\xi}\, d\xi = \lambda^p\zeta(p), \quad \text{si} \quad \lambda \in [0,\ 1[$$

Si $\lambda \in [n,\ n+1[$, il vient

$$p\int_{\ln\lambda}^0 [e^\xi]\, e^{-p\xi}\, d\xi = -p\int_1^\lambda \frac{[y]\, dy}{y^{p+1}} = -p\int_1^n \frac{[y]\, dy}{y^{p+1}} - p\int_n^\lambda \frac{[y]\, dy}{y^{p+1}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} p\int_k^{k+1} \frac{k\, dy}{y^{p+1}} - pn\int_n^2 \frac{dy}{y^{p+1}} ;$$

e calcul des intégrales donne

$$p\int_1^\lambda \frac{[y]\, dy}{y^{p+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k^p} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k^p} + \frac{n}{n^p} - \frac{n}{\lambda^p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \lambda^{-p}[\lambda],$$

donc

$$[\lambda e^t] = \lambda^p\zeta(p), \quad \text{si} \quad \lambda \in [0,\ 1[;$$

$$[\lambda e^t] = \lambda^p\zeta(p) - \lambda^p \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{k}{k^p} + [\lambda], \qquad \text{si } \lambda \geqslant 1. \tag{9.72}$$

On obtient visiblement l'égalité

$$\{\lambda e^t\} = \lambda e^t - [\lambda e^t] = \frac{\lambda p}{p-1} - \lambda^p\zeta(p) + \lambda^p \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{1}{k^p} - [\lambda], \tag{9.73}$$

qui peut encore s'écrire

$$\{\lambda e^t\} = \frac{\lambda}{p-1} + \{\lambda\} + \lambda^p \left(\sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right). \tag{9.74}$$

5. Trouver l'image opérationnelle de la fonction $M(\lambda e^t)$. On a

$$p \int_0^\infty M(\lambda e^t) e^{-pt} dt = \lambda^p p \int_1^\infty \frac{M(y)\,dy}{y^{p+1}} - \lambda^p p \int_1^\lambda \frac{M(y)}{y^{p+1}} dy =$$

$$= \frac{\lambda^p}{\zeta(p)} - \lambda^p p \int_1^{[\lambda]} \frac{M(y)\,dy}{y^{p+1}} - \lambda^p p \int_{[\lambda]}^{\lambda} \frac{M(y)}{y^{p+1}} dy;$$

le calcul des intégrales donne

$$p \int_0^\infty M(\lambda e^t) e^{-pt} dt = \frac{\lambda^p}{\zeta(p)} - \lambda^p \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{M(k)}{k^p} + M(\lambda);$$

donc

$$M(\lambda e^t) = \lambda^p \left(\frac{1}{\zeta(p)} - \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{M(k)}{k^p} \right) + M(\lambda). \tag{9.75}$$

Soit maintenant la fonction

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k \leq \lambda} a_k, \quad k = 1, 2, \ldots; \qquad \Phi(\lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda = 1, \tag{9.76}$$

de façon analogue, on obtiendrait

$$\Phi(\lambda e^t) = \lambda^p \left(\sum_{k=1} \frac{a_k}{k^p} - \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{a_k}{k^p} \right) + \Phi(\lambda), \ \lambda \in]0, \infty[. \tag{9.77}$$

Une autre méthode de démonstration consiste à vérifier directement l'égalité

$$\lambda^{-p}\Phi(\lambda e^t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p} - \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{a_k}{k^p} + \lambda^{-p}\Phi(\lambda). \tag{9.78}$$

D'un côté on a

$$\lambda^{-p}\Phi(\lambda e^t) = e^{-p \ln \lambda}\Phi(\lambda e^t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t < \ln \lambda, \\ \Phi(e^t), & \text{si} \quad t > \ln \lambda. \end{cases}$$

De l'autre,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p} - \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{a_k}{k^p} + \Phi(\lambda) = \Phi(e^t) + \lambda^{-p}\Phi(\lambda) - \sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{a_k}{k^p};$$

or

$$\lambda^{-p}\Phi(\lambda) = e^{-p \ln \lambda}\Phi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t < \ln \lambda, \\ \Phi(\lambda), & \text{si} \quad t > \ln \lambda, \end{cases}$$

et

$$\sum_{k=1}^{[\lambda]} \frac{a_k}{k^p} = \sum_{k\leqslant\lambda} \frac{a_k}{k^p} = \begin{cases} \sum\limits_{k\leqslant e^t} a_k - \Phi(e^t), & \text{si } e^t < \lambda, \text{ i.e. } [t < \ln\lambda, \\ \Phi(\lambda), & \text{si } e^t > \lambda, \text{ i.e. } t > \ln\lambda, \end{cases}$$

ce qui démontre (9.78), et partant (9.77).

6. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{\frac{x}{k^2}\right\} = \frac{6x}{\pi^2} - \sum_{k=1}^{[x]} |\mu(k)|.$$

En supposant que $\lambda \in]0, 1]$ dans (9.73), on aura

$$\{\lambda e^t\} = \frac{\lambda p}{p-1} - \lambda^p \zeta(p), \tag{9.79}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{\frac{e^t}{k^2}\right\} = e^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} - \zeta(p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{2p}},$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{\frac{e^t}{k^2}\right\} = \frac{e^t}{\zeta(2)} - \frac{\zeta(p)}{\zeta(2p)};$$

or (cf. (9.61)) $\dfrac{\zeta(p)}{\zeta(2p)} = \sum\limits_{k=1}^{[e^t]} |\mu(k)|$, donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{\frac{e^t}{k^2}\right\} = \frac{e^t}{\zeta(2)} - \sum_{k=1}^{[e^t]} |\mu(k)|.$$

7. Montrer que si $\varphi(n)$ est le nombre de nombres inférieurs à n et simples avec n, on a

$$\sum_{k=1}^{[x]} \frac{\varphi(k)}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left\{\frac{x}{k}\right\} = \frac{6}{\pi^2} x. \tag{9.80}$$

Dans (9.79), posant $\lambda = \frac{1}{k}$, multipliant par $\frac{\mu(k)}{k}$ et sommant on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left\{\frac{e^t}{k}\right\} = e^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} - \frac{\zeta(p)}{\zeta(p+1)}$$

ou (cf. (9.62))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left\{\frac{e^t}{k}\right\} = e^t \frac{6}{\pi^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{nn^p},$$

d'où résulte l'égalité (9.80) et de là l'égalité

$$\sum_{k=1}^{[x]} \frac{\varphi(k)}{k} = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{\mu(k)}{k} \left[\frac{x}{k}\right].$$

3. **Equations aux différences finies.** Dans les équations aux différences finies on étudie généralement l'opérateur aux différences

$$\Delta f[t] = f[t+1] - f[t]. \qquad (9.81)$$

L'expression $\Delta f[t] = f[t+1] - f[t]$ s'appelle *différence du premier ordre*, l'expression

$$\Delta^2 f[t] = \Delta(f[t+1] - f[t]) = f[t+2] - 2f[t+1] + f[t]$$

différence du second ordre, ou *différence seconde*. Il est aisé d'établir par récurrence que la différence d'ordre n a pour expression

$$\Delta^n f[t] = \Delta(\Delta^{n-1} f[t]) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f[t+k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f[t+n-k]. \qquad (9.82)$$

On appelle *équation aux différences d'ordre n* une expression contenant la variable inconnue, l'opérateur aux différences et la fonction inconnue, ici $x[t]$,

$$F\{[t], x[t], \Delta x[t], \ldots, \Delta^n x[t]\} = 0. \qquad (9.83)$$

Une solution de (9.83) est une fonction qui transforme (9.83) en identité.

Si dans l'équation (9.83), on exprime les différences à l'aide des valeurs de la fonction inconnue, calculées avec la formule (9.82), cette équation ne contiendra plus que $x[t], x[t+1], \ldots, x[t+n]$. Par exemple, l'équation

$$\Delta^3 x[t] - 2\Delta x[t] + x[t] = f[t]$$

devient

$$x[t+3] - 3x[t+2] + x[t+1] + 2x[t] = f[t].$$

L'équation

$$\Delta^3 x[t] + 3\Delta^2 x[t] + 3\Delta x[t] + x[t] = f[t]$$

s'écrit quant à elle

$$x[t+3] = f[t].$$

D'une façon générale, une équation aux différences d'ordre n, après substitution aux différences de leurs expressions (9.82), s'écrit

$$x[t+n] = \Phi\{[t], x[t], x[t+1], \ldots, x[t+n-1]\}. \qquad (9.84)$$

La solution de cette équation dépend des n valeurs initiales $x(0)$, $x(1), \ldots, x(n-1)$. Si ces valeurs sont connues, on peut définir de proche en proche $x[t]$ pour tout t à partir de l'équation (9.84). Par exemple, en posant $t = 0$, on trouve $x(n)$. Sachant $x(1), x(2), \ldots$ $\ldots, x(n)$, à partir de (9.84), on définit pour $t = 1$ $x(n+1), \ldots$

..., $x(n+2)$, etc. Les conditions initiales de l'équation aux différences (9.83) sont données sous la forme de valeurs prises par les différences

$$x(0),\ \Delta x(0),\ \Delta^2 x(0),\ \ldots,\ \Delta^{n-1} x(0).$$

Les équations aux différences linéaires à coefficients constants se résolvent facilement par la méthode opérationnelle si sont données les conditions initiales. Soient les équations

$$a_n \Delta^n x[t] + a_{n-1}\Delta^{n-1} x[t] + \ldots + a_1 \Delta x[t] + a_0 x[t] = f[t], \quad a_n \neq 0; \qquad (9.85)$$

$$b_n x[t+n] + b_{n-1} x[t+n-1] + \ldots + b_1 x[t+1] + b_0 x[t] = f[t], \quad b_n \neq 0; \qquad (9.86)$$

avec les conditions initiales

$$x(0),\ \Delta x(0),\ \Delta^2 x(0),\ \ldots,\ \Delta^{n-1} x(0) \qquad (9.87)$$

pour l'équation (9.85), et les conditions

$$x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(n-1) \qquad (9.88)$$

pour l'équation (9.86).

Résolvons l'équation (9.85) avec les conditions (9.87). Cherchons l'image opérationnelle de $\Delta^k x[t]$. De (9.26) il vient pour $n = 1$

$$f[t+1] = e^p \bar{f}(p) - (1 - e^p) f(0) e^p,$$

$$f[t+1] = e^p \bar{f}(p) - (e^p - 1) f(0);$$

on a $f(t) = \bar{f}(p)$; donc

$$\Delta f[t] = f[t+1] - f[t] = (e^p - 1)\bar{f}(p) - (e^p - 1) f(0).$$

Et

$$\Delta f[t] = (e^p - 1)(\bar{f}(p) - f(0)). \qquad (9.89)$$

d'où

$$\Delta^2 f[t] = (e^p - 1)[e^p - 1)(\bar{f}(p) - f(0)) - \Delta f(0)],$$

ou

$$\Delta^2 f[t] = (e^p - 1)^2 \bar{f}(p) - (e^p - 1)^2 f(0) - (e^p - 1)\Delta f(0).$$

En appliquant de proche en proche (9.89), on obtient l'image opérationnelle

$$\Delta^k f[t] = (e^p - 1)^k \bar{f}(p) - (e^p - 1)^k f(0) - (e^p - 1)^{k-1}\Delta f(0) - (e^p - 1)^{k-2}\Delta^2 f(0) - \ldots - (e^p - 1)\Delta^{k-1} f(0). \qquad (9.90)$$

En notant

$$e^p - 1 = r, \tag{9.91}$$

(9.89) s'écrit

$$r\,[f\,[t] - f\,(0)] = \Delta f\,[t]. \tag{9.92}$$

En posant $f\,[t] = (1 + \lambda)^{[t]} - 1$ dans (9.92), on obtient

$$r\,[(1+\lambda)^{[t]} - 1] = (1+\lambda)^{[t+1]} - (1+\lambda)^{[t]} = (1+\lambda)^{[t]+1} - (1+\lambda)^{[t]},$$

d'où il vient

$$r\,(1+\lambda)^{[t]} - r = (1+\lambda)^{[t]}\,(1+\lambda-1),$$

ou

$$(r-\lambda)\,(1+\lambda)^{[t]} = r\,;$$

et

$$\frac{r}{r-\lambda} = (1+\lambda)^{[t]} \quad \lambda \neq -1. \tag{9.93}$$

En dérivant k fois par rapport à λ, on obtient

$$\frac{r}{(r-\lambda)^{k+1}} = \frac{[t]\,([t]-1)\,\ldots\,([t]-k+1)}{k\,!}(1+\lambda)^{[t-k]}, \tag{9.93}$$

ou

$$\frac{r}{(r-\lambda)^{k+1}} = \binom{[t]}{k}\,(1+\lambda)^{[t-k]}, \quad \lambda \neq -1. \tag{9.94}$$

Si $\lambda = -1$, alors $r + 1 = e^p$ et au lieu de (9.94) on aura

$$\frac{r}{(r+1)^{k+1}} = \frac{e^p - 1}{e^{(k+1)p}} = e^{-kp} - e^{-(k+1)p} = \begin{cases} 0 \text{ si } t > k\,; \\ 1 \text{ si } t \in [k,\, k+1[\,; \\ 0 \text{ si } k+1 \leqslant t. \end{cases}$$

En posant $e^p - 1 = r$ dans (9.90) et compte tenu de $\overline{f}\,(p) = f\,[t]$, il vient

$$\Delta^k f\,[t] = r^k f\,[t] - r^k f\,(0) - r^{k-1}\Delta f\,(0) - \ldots - r\Delta^{n-1} f\,(0). \tag{9.95}$$

En se servant de la dernière formule, remplaçons Δ par r dans (9.85):

$$a_n\,\{r^n x\,[t] - r^n x\,(0) - r^{n-1}\,\Delta x\,(0) - \ldots - r\Delta^{n-1} x\,(0)\} +$$
$$+\, a_{n-1}\,\{r^{n-1} x\,[t] - r^{n-1} x\,(0) - r^{n-2}\,\Delta x\,(0) - \ldots - r\Delta^{n-2} x\,(0)\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\, a_1\,\{rx\,[t] - rx\,(0)\} + a_0 x\,[t] = f\,[t].$$

Posant

$$L\,(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0,$$

on a

$$L\,(r)\,x\,[t] - x\,(0)\,(L\,(r) - a_0) - \Delta x\,(0)\,(L\,(r) - a_0 - a_1 r)\,\frac{1}{r} -$$
$$- \ldots - \Delta^{n-1} x\,(0)\,[L\,(r) - a_0 - a_1 r - \ldots - a_{n-1} r^{n-1}]\,\frac{1}{r^{n-1}} = f\,[t],$$

d'où

$$L(r)\left\{x(t)-x(0)-\frac{\Delta x(0)}{r}-\ldots-\frac{\Delta^{n-1}x(0)}{r^{n-1}}\right\}+c_0+\frac{c_1}{r}+$$
$$+\ldots+\frac{c_{n-1}}{r^{n-1}}=f[t].$$

Ici

$$c_0=x(0)a_0+\Delta x(0)a_1+\ldots+\Delta^{n-1}x(0)a_{n-1};$$

. . . .

$$c_k=\sum_{m=k}^{n-1}\Delta^m x(0)a_{m-k};\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1), \tag{9.96}$$

donc

$$x[t]-x(0)-\frac{\Delta x(0)}{r}-\ldots-\frac{\Delta^{n-1}x(0)}{r^{n-1}}=\frac{1}{L(r)}f[t]-\frac{1}{L(r)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{r^k}.$$

la solition de (9.85) s'écrit

$$x[t]=\frac{1}{L(r)}f[t]+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Delta^k x(0)}{r^k}-\frac{1}{L(r)}\frac{c_k}{r^k}\right). \tag{9.97}$$

C'est une somme de deux fonctions:

$$x_1[t]=\frac{1}{L(r)}f[t]\ \text{ et }\ x_2[t]=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^k x(0)-\frac{c_k}{L(r)}\right)\frac{1}{r^k}.$$

De toute évidence, $x_1[t]$ est la solution de (9.85) qui vérifie les conditions initiales nulles.

Il est aisé de prouver à partir de l'opérateur $L(r)$ que $x_1[t]=$ $=\frac{1}{L(r)}f[t]$ s'annule pour $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$. En effet, l'opérateur $\frac{r^n}{L(p)}$, ainsi qu'il suit du développement de $\frac{r^{n-1}}{L(r)}$ en fractions élémentaires, est réductible à une fonction (cf. (9.94)). Supposons que $\frac{r^n}{L(r)}=\Phi[t]$, il vient

$$x_1[t]=\frac{1}{L(r)}f[t]=\frac{1}{r^n}\frac{r^n}{L(r)}f[t]=\frac{1}{r^n}\Phi[t]\ast f[t].$$

On a (cf. (9.9))

$$\Phi[t]\ast f[t]=s\sum_{k=0}^{[t]}\Phi[t-k]f(k),\ \text{où}\ s=1-e^{-p};$$

$$r=e^p-1-e^p s,$$

donc

$$x_1[t] = \frac{s}{r^n} \sum_{k=0}^{[t]} \Phi[t-k] f(k) = \frac{e^{-np}}{s^{n-1}} \sum_{k=0}^{[t]} \Phi[t-k] f(k).$$

Or $\frac{1}{s^{n-1}} \sum_{k=0}^{[t]} \Phi[t-k] f(k) = \Psi[t]$ est une fonction (cf (9.13) et (9.9)), donc $x_1[t] = e^{-np}\Psi[t]$, d'où il suit en vertu des propriétés de l'opérateur e^{-np}

$$x_1(0) = 0, \; x_1(1) = 0, \ldots, \; x_1(n-1) = 0. \tag{9.98}$$

Pour trouver $x_1[t]$, il faut décomposer $\frac{1}{L(r)}$ en fractions élémentaires. Soit

$$\frac{1}{L(r)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_k - 1} \frac{A_{k,\nu}}{(r-\lambda_k)^{\nu+1}},$$

où λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ sont les racines de l'équation $L(r) = 0$ comptées avec leurs multiplicités $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Donc, $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n$. Eu égard à (9.94), il vient alors

$$\frac{r}{L(r)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\nu_k - 1} \frac{A_{k\nu} r}{(r-\lambda_k)^{\nu+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\nu_k} A_{k,\nu} \binom{[t]}{\nu} (1+\lambda_k)^{[t-\nu]} = \varphi[t], \tag{9.99}$$

et

$$\frac{1}{L(r)} f[t] = \frac{1}{r} \frac{r}{L(r)} f[t] = \frac{1}{r} \varphi[t] * f[t].$$

Or (cf. (9.9))

$$\varphi[t] * f[t] = s \sum_{k=0}^{[t]} \varphi[t-k] f(k), \quad \text{où } s = 1 - e^{-p} = e^{-p}(e^p - 1) = e^{-p} r;$$

donc,

$$x_1(t) = \frac{1}{L(r)} f[t] = \frac{1}{r} e^{-p} r \sum_{k=0}^{[t]} \varphi[t-k] f(k),$$

ou, compte tenu de (9.98),

$$\frac{1}{L(r)} f[t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, n-1]; \\ \sum_{k=0}^{[t-1]} \varphi[t-1-k] f(k) & \text{si } t \geqslant n. \end{cases} \tag{9.100}$$

Le second terme

$$R(r)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^k x(0)-\frac{c_k}{L(r)}\right)\frac{1}{r^k}, \tag{9.101}$$

de (9.97) est visiblement solution de l'équation aux différences homogène associée

$$a_n\Delta^n x[t]+a_{n-1}\Delta^{n-1}[t]+\ldots+a_1\Delta x[t]+a_0 x[t]=0,$$

avec les conditions initiales données. La recherche de cette solution se ramène au calcul de l'opérateur rationnel $R(r)$. On peut effectuer ce calcul à l'aide des règles exposées au § 5 pour les opérateurs rationnels $R(p)$, en prenant, certes, soin de remplacer p par r, i.e. en utilisant les formules (9.93) et (9.94).

Exemple 1. On demande la solution de l'équation aux différences troisièmes $\Delta^3 x[t]-\Delta^2 x[t]-8\Delta x[t]+12x[t]=f[t]$, qui vérifie les conditions $x(0)=0$, $\Delta x(0)=0$, $\Delta^2 x(0)=0$.

On a

$$L(r)=r^3-r^2-8r+12=r^3+3r^2-4r^2-12r+4r+12=$$
$$=r^2(r+3)-4r(r+3)+4r(r+3)=(r+3)(r-2)^2.$$

Donc,

$$\frac{1}{L(r)}=\frac{A}{r+3}+\frac{B}{r-2}+\frac{c}{(r-2)^2}.$$

De toute évidence,

$$A=\lim_{r\to-3}\frac{r+3}{L(r)}=\frac{1}{25},\qquad C=\lim_{r\to2}\frac{(r-2)^2}{L(r)}=\frac{1}{5};$$

$$B=\lim_{r\to2}\frac{d}{dr}\frac{(r-2)^2}{L(r)}=\lim_{r\to2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r+3}=-\frac{1}{25}.$$

Et

$$\frac{r}{L(r)}=\frac{r}{25(r+3)}-\frac{r}{25(r-2)}+\frac{r}{5(r-2)^2}.$$

Or (cf. (9.94))

$$\frac{r}{r+3}=(1-3)^{[t]}=(-2)^{[t]},\qquad \frac{r}{r-2}=3^{[t]}$$

et

$$\frac{r}{(r-2)^2}=\binom{[t]}{1}3^{[t-1]}=[t]\,3^{[t-1]},$$

par conséquent,

$$\varphi[t]=\frac{1}{25}\left((-2)^{[t]}-3^{[t]}\right)+\frac{1}{5}[t]\,3^{[t-1]}$$

et (cf. (9.100)), pour $t\geqslant 3$, la solution cherchée s'écrit

$$x[t]=\frac{1}{25}\sum_{k=0}^{[t-1]}\{(-2)^{[t-1-k]}-3^{[t-1-k]}\}f(k)+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{[t-1]}[t-1-k]\,3^{[t-2-k]}f(k).$$

Exemple 2. Trouver la solution de l'équation

$$\Delta^2 x[t]-3\Delta x[t]+2x[t]=0$$

vérifiant les conditions $x(0)=1$, $\Delta x(0)=-1$.

De toute évidence,

$L(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2);\quad a_2 = 1,\quad a_1 = -3,\quad a_0 = 2;$

$c_0 = x(0)\,a_0 + \Delta x(0)\quad a_1 = 2 + 3 = 5;\quad c_1 = \Delta x(0)a_0 = -2;$

$$x[t] = R(r) = \left(1 - \frac{5}{L(r)}\right) + \left(-1 + \frac{2}{L(r)}\right)\frac{1}{r},$$

ou

$$x[t] = \frac{rL(r) - 5r - L(r) + 2}{rL(r)} = \frac{r^3 - 4r^2}{r(r-1)(r-2)} = \frac{r^2 - 4r}{(r-1)(r-2)};$$

$$\frac{r^2 - 4r}{r(r-1)(r-2)} = \frac{A}{r-1} + \frac{B}{r-2}$$

et

$$A = \lim_{r\to 1}\frac{r-4}{r-2} = 3;\qquad B = \lim_{r\to 2}\frac{r-4}{r-1} = -2.$$

Donc

$$\frac{r-4}{(r-1)(r-2)} = \frac{3}{r-1} - \frac{2}{r-2},$$

d'où

$$x[t] = \frac{3r}{r-1} - \frac{2r}{r-2} = 3\cdot 2^{[t]} - 2\cdot 3^{[t]}.$$

Considérons maintenant l'équation (9.86). En vertu de (9.26) et du fait que $x[t] = \bar{x}(p)$, il vient

$$x[t+k] = e^{kp}x[t] - (1 - e^{-p})\,[x(0)\,e^{kp} + x(1)\,e^{(k-1)p} + \ldots \\ \ldots + x(k-1)\,e^{p}]. \quad (9.102)$$

Portant cette expression dans (9.86), on obtient

$$b_n\{e^{np}x[t] - (1 - e^{-p})\,(x(0)\,e^{np} + x(1)\,e^{(n-1)p} + \\ + x(2)\,e^{(n-2)p} + \ldots + x(n-1)\,e^{p})\} + \\ + b_{n-1}\{e^{(n-1)p}x[t] - (1 - e^{-p})\,x(0)\,e^{(n-1)p} + \\ + x(1)\,e^{(n-2)p} + x(2)\,e^{(n-3)p} + \ldots + x(n-2)\,e^{p})\} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + b_2\{e^{2p}x[t] - (1 - e^{-p})\,(x(0)\,e^{2p} + x(1)\,e^{p})\} + \\ + b_1\{e^{p}x[t] - (1 - e^{-p})\,x(0)\,e^{p}\} + \\ + b_0x[t] = f[t],$$

ou

$$(b_ne^{np} + b_{n-1}e^{(n-1)p} + \ldots + b_1e^{p} + b_0)\,x[t] = \\ = (1 - e^{-p})\,\{b_ne^{np} + b_{n-1}e^{(n-1)p} + \ldots + b_2e^{2p} + \\ + b_1e^{p})\,x(0) + (b_ne^{(n-1))^{p}} + b_{n-1}e^{(n-2)p} + \ldots + b_2e^{p})\,x(1) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (b_ne^{2p} + b_{n-1}e^{p})\,x(n-2) + b_ne^{p}x(n-1)\} + f[t].$$

Soit

$$M(e^p) = b_n e^{np} + b_{n-1} e^{(n-1)p} + \ldots + b_1 e^p + b_0 ;$$
$$M_0(e^p) = b_n e^{np} + b_{n-1} e^{(n-1)p} + \ldots + b_1 e^p ;$$
$$M_1(e^p) = b_n e^{(n-1)p} + b_{n-1} e^{(n-2)p} + \ldots + b_2 e^p ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_k(e^p) = b_n e^{(n-k)p} + b_{n-1} e^{(n-k-1)p} + \ldots + b_{k+1} e^p ;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_{n-1}(e^p) = b_n e^p,$$

il vient

$$M(e^p)\, x[t] = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{n-1} M_k(e^p)\, x(k) + f[t].$$

La solution est donc de la forme

$$x[t] = \frac{1}{M(e^p)} f[t] + (1 - e^{-p}) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M_k(e^p)}{M(e^p)} x(k). \tag{9.103}$$

En décomposant les fractions rationnelles propres $\frac{1}{zM(z)}$ et $\frac{M_k(z)}{zM(z)}$ en fractions élémentaires, on trouve sans peine la solution $x[t]$. Posons

$$\frac{(1 - e^{-p})\, M_k(e^p)}{M(e^p)} = \varphi_k[t],$$

il vient

$$x[t] = \frac{1}{M(e^p)} f[t] + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k[t]\, x(k). \tag{9.104}$$

Le premier terme $\frac{1}{M(e^p)} f[t]$ est la solution de l'équation (9.86) qui vérifie les conditions initiales nulles, $\varphi_k[t]$ la solution de l'équation homogène

$$b_n x[t+n] + b_{n-1} x[t+n-1] + \ldots + b_1 x[t+1] + b_0 x[t] = 0,$$

qui vérifie la condition $\varphi_k(m) = 0$ si $m \neq k$ et $\varphi_k(k) = 1$.

E x e m p l e 3. Trouver la solution de l'équation $x[t+2] - 2x[t+1] + x[t] = \sin \omega[t]$ qui vérifie les conditions initiales nulles $x(0) = x(1) = 0$.

On a

$$x[t] = \frac{1}{M(e^p)} \sin \omega[t],$$

où

$$M(e^p) = e^{2p} - 2e^p + 1 = (e^p - 1)^2 ; \qquad \frac{1}{M(e^p)} = \frac{1}{r^2}.$$

L'équation (9.94) donne pour $k=1$ et $\lambda=0$

$$\frac{r}{M(e^p)}=\frac{1}{r}=\binom{[t]}{1}=[t].$$

Donc

$$x[t]=\frac{1}{r^2}\sin\omega[t]=\frac{1}{r}[t]\ast\sin\omega[t]=\frac{s}{t}\sum_{k=0}^{[t]}[t-k]\sin\omega k,$$

ou si l'on souvient que $\frac{s}{r}=e^{-p}$

$$x[t]=e^{-p}\sum_{k=0}^{[t]}[t-k]\sin\omega k=\sum_{k=0}^{[t-1]}[t-1-k]\sin\omega k,\qquad t\geqslant 1. \quad (9.105)$$

On peut trouver la solution $x(t)$ d'une autre manière, en l'occurrence, trouver l'image opérationnelle de la fonction $\sin\omega[t]$. On a

$$\sin\omega[t]=(1-e^{-p})\sum_{k=0}^{\infty}\sin\omega k e^{-kp}=\frac{(e^p-1)\sin\omega}{e^{2p}-2e^p\cos\omega+1},$$

donc

$$x[t]=\frac{1}{(e^p-1)^2}\sin\omega[t]=\frac{\sin\omega}{(e^p-1)(e^{2p}-2e^p\cos\omega+1)}=$$

$$=\frac{A}{e^p-1}+\frac{B}{e^p-e^{i\omega}}+\frac{C}{e^p-e^{-i\omega}},$$

d'où

$$A=\frac{\sin\omega}{2(1-\cos\omega)},\qquad B=-\frac{1-\cos\omega+i\sin\omega}{4i(1-\cos\omega)},$$

$$C=\frac{1-\cos\omega-i\sin\omega}{4i(1-\cos\omega)}.$$

Calculons

$$\frac{1}{e^p-e^\lambda}=\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}\,\frac{e^p-1}{e^p-e^\lambda}=e^{-p}\sum_{k=0}^{[t]}e^{\lambda[k]}=\sum_{k=0}^{[t-1]}e^{\lambda k},\quad t\geqslant 1,$$

pour $t\geqslant 1$, il vient alors

$$x[t]=\frac{\sin\omega}{2(1-\cos\omega)}\left[t-\sum_{k=0}^{[t-1]}\frac{(1-\cos\omega)\sin k\omega+\sin\omega\cos k\omega}{2(1-\cos\omega)}\right]. \quad (9.106)$$

Il est clair que (9.105) et (9.106) expriment la même fonction.
On a de toute évidence (cf. (9.4), (9.91))

$$s=1-e^{-p}=\frac{r}{r+1},\qquad 1-s=\frac{1}{1+r}, \quad (9.107)$$

et (9.107) entraîne

$$f[t]=r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{(r+1)^{k+1}}. \quad (9.108)$$

Si $g[t] = r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(k)}{(r+1)^{k+1}}$, alors

$$\frac{1}{r} f[t] * g[t] = \frac{1}{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{(r+1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k),$$

d'où

$$\frac{1}{r} f[t] * g[t] = e^{-p} \sum_{k=0}^{[t]} f([t]-k)\, g(k) \quad \text{pour} \quad t < 1$$

et

$$\frac{1}{r} f[t] * g[t] = \sum_{k=0}^{[t-1]} f([t-1]-k)\, g(k) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 1. \qquad (9.109)$$

Calculons

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{2^{n+1}} f[t].$$

On a (cf. (9.90))

$$r^n = \Delta^n f[t] + \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-k} \Delta^k f(0), \qquad (9.110)$$

donc

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f[t] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-k} \Delta^k f(0),$$

ou

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f[t] + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k f(0) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{n-k}}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f[t] - \frac{r}{r+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Delta^k f(0)}{2^{k+1}};$$

ou encore

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\Delta^n f[t] - \frac{r}{r+2} \Delta^n f(0) \right].$$

Comme $\frac{r}{r+2} = (-1)^{[t]}$, il vient

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} [\Delta^n f[t] - (-1)^{[t]} \Delta^n f(0)]. \quad (9.111)$$

Posons $g[t] = (-1)^{[t]} = \frac{r}{r+2}$ dans la formule (9.109)

$$\frac{1}{r+2} f[t] = \sum_{k=0}^{[t-1]} f([t-1]-k)(-1)^k = \sum_{k=0}^{[t-1]} (-1)^{[t-1]-k} f(k) =$$

$$= (-1)^{[t-1]} \sum_{k=0}^{[t-1]} (-1)^k f(k).$$

La dernière égalité et (9.111) entraînent

$$\sum_{k=0}^{[t-1]} f(k) - 1^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Delta^n f(0)}{2^{n+1}} - (-1)^{[t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f[t]. \quad (9.112)$$

Si le second terme de droite tend vers zéro lorsque $t \to \infty$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)(-1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Delta^n f(0)}{2^{n+1}}. \quad (9.113)$$

La formule (9.112) est un cas particulier de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{[t-1]} \frac{f(k)}{(1+\lambda)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{\lambda^{n+1}} - (1+\lambda)^{-[t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}}. \quad (9.114)$$

La démonstration de cette égalité s'effectue comme précédemment. En posant $g[t] = (1+\lambda)^{[t]} = \frac{r}{r-\lambda}$ dans (9.109), on obtient

$$\frac{1}{r-\lambda} f[t] = \sum_{k=0}^{[t-1]} f([t-1]-k)(1+\lambda)^k,$$

ou

$$\frac{1}{r-\lambda} f[t] = (1+\lambda)^{[t]} \sum_{k=0}^{[t-1]} \frac{f(k)}{(1+\lambda)^{k+1}}. \quad (9.115)$$

Compte tenu de (9.110), il vient

$$\frac{1}{r-\lambda} f[t] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{\lambda^{n+1}} f[t] =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-k} \Delta^n f(0) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k f(0) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{r^{n-k}}{\lambda^{n+1}},$$

donc,

$$\frac{1}{r-\lambda} f[t] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}} + \frac{r}{r-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{\lambda^{k+1}},$$

ou

$$\frac{1}{r-\lambda} f[t] = (1+\lambda)^{[t]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{\lambda^{k+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}}.$$

Il est évident que la dernière égalité et (9.115) entraînent (9.114). Si $\lim_{t\to\infty} (1+\lambda)^{-[t]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f[t]}{\lambda^{n+1}} = 0$, de (9.114) suit la formule d'Euler

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{(1+\lambda)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{\lambda^n}. \tag{9.116}$$

Si maintenant l'on pose $\lambda = r$ dans (9.116) et que l'on tienne compte de ce que $\frac{1}{r^n} = \binom{[t]}{n}$ (cf. (9.94)), on obtient

$$f[t] = r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{(r+1)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{[t]}{n} \Delta^n f(0). \tag{9.117}$$

De façon analogue, en posant $\lambda = p$ dans (9.114), il vient

$$e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)\, t^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{n!} t^n,$$

et en remplaçant dans cette dernière t par $\frac{1}{p}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{k!} t^{\frac{k}{2}} J_k(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n f(0)}{(n!)^2} t^n.$$

Supposons que $\frac{1}{\lambda}=1-\frac{1}{p}$, alors

$$\lambda=\frac{p}{p-1}, \quad 1+\lambda=\frac{2p-1}{p-1}, \quad \frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{p}{2p-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+\lambda}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}}\right).$$

Par ailleurs,

$$L_k\left(\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}=\frac{p}{p-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}}\right)^k.$$

Si maintenant $\lambda=\frac{p}{p-1}$ dans (9.116), on a

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{(1+\lambda)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{p}{2}}{p-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}}\right)^k\frac{f(k)}{2^k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{2^{k+1}}L_k\left(\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)\frac{1}{\lambda^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)\left(1-\frac{1}{p}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)L_n(t);$$

donc,

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)L_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(k)}{2^{k+1}}L_k\left(\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}. \qquad (9.118)$$

CHAPITRE III

APPLICATIONS DU CALCUL OPÉRATIONNEL AUX PROBLÈMES D'ANALYSE

§ 10. Application du calcul opérationnel à la résolution d'équations différentielles

1. Equations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants. Soit l'équation différentielle ordinaire, linéaire d'ordre n, à coefficients constants

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty[, \tag{10.1}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = x_1, \; \ldots, \; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{10.2}$$

En appliquant la formule

$$x^{(k)}(t) = p^k x(t) - p^k x(0) - p^{k-1}x'(0) - \ldots - p x^{(k-1)}(0), \tag{10.3}$$

on peut mettre l'équation (10.1) sous la forme

$$L(p)\left[x(t) - x_0 - \frac{x_1}{p} - \ldots - \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}}\right] = f(t) - b_0 - \frac{b_1}{p} - \ldots - \frac{b_{n-1}}{p^{n-1}},$$

où

$$L(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0;$$

$$b_k = \sum_{s=k}^{n-1} x_s a_{s-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

d'où il vient

$$x(t) = \frac{1}{L(p)} f(t) - \frac{1}{L(p)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{p^k} + x_0 + \frac{x_1}{p} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}}. \tag{10.4}$$

Cette formule donne la solution de l'équation (10.1). On voit aussitôt que le second membre de (10.4) est une fonction n fois dérivable qui vérifie les conditions initiales.

La première partie de la solution (10.4), soit

$$x_1(t) = \frac{f(t)}{L(p)} \tag{10.5}$$

est la solution de l'équation non homogène (10.1), qui vérifie les conditions initiales nulles, la seconde partie, i.e.

$$x_2(t) = -\frac{1}{L(p)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{p^k} + x_0 + \frac{x_1}{p} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}} \tag{10.6}$$

est la solution de l'équation homogène associée, qui vérifie les conditions initiales (10.2). Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des zéros simples de $L(p)$, il vient

$$L(p) = (p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\ldots(p-\lambda_n) = \prod_{\rho=1}^{n}(p-\lambda_\rho),$$

et la fonction $\bar{z}(p) = \frac{1}{L(p)}$ se décompose en fractions élémentaires

$$\bar{z}(p) = \frac{1}{L(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu}{p-\lambda_\nu}. \tag{10.7}$$

Multipliant (10.7) par $(p - \lambda_\mu)$, on obtient

$$\frac{p-\lambda_\mu}{L(p)} = c_\mu + (p-\lambda_\mu) \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{c_\nu}{p-\lambda_\nu},$$

où le symbole « prime » qui affecte la somme veut dire que la sommation n'est pas étendue aux termes pour lesquels $\mu = \nu$. Le passage à la limite, lorsque $p \to \lambda_\mu$, donne

$$c_\mu = \lim_{p\to\lambda_\mu} \frac{p-\lambda_\mu}{L(p)} = \lim_{p\to\lambda_\mu} \frac{1}{\frac{L(p)-L(\lambda_\mu)}{p-\lambda_\mu}} = \frac{1}{L'(\lambda_\mu)}.$$

Le développement de $\bar{z}(p)$ en fractions élémentaires s'écrit donc

$$\bar{z}(p) = \frac{1}{L(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(p-\lambda_\nu)L'(\lambda_\nu)}.$$

En vertu de (5.44), on a

$$z(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu t}-1}{\lambda_\nu L'(\lambda_\nu)},$$

d'où il résulte, compte tenu de (5.47),

$$x_1(t) = \bar{z}(p) f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t z(t-\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \int_0^t e^{-\lambda_\nu \tau} f(\tau)\, d\tau. \tag{10.8}$$

Si $L(p)$ possède dez zéros multiples,

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_r,\quad \lambda_{r+1},\ \lambda_{r+2},\ \ldots,\ \lambda_n,$$

alors

$$L(\lambda)=(p-\lambda_1)^r(p-\lambda_{r+1})(p-\lambda_{r+2})\ldots(p-\lambda_n)=(p-\lambda_1)^r L_r(p),$$

où

$$L_r(p)=(p-\lambda_{r+1})(p-\lambda_{r+2})\ldots(p-\lambda_n),$$

et la fonction $\bar{z}(p)$ est représentée par la somme de fractions élémentaires

$$\bar{z}(p)=\frac{1}{L(p)}=\frac{c_{11}}{p-\lambda_1}+\frac{c_{12}}{(p-\lambda_1)^2}+\ldots+\frac{c_{1r}}{(p-\lambda_1)^r}+$$
$$+\frac{c_{r+1}}{p-\lambda_{r+1}}+\ldots+\frac{c_n}{p-\lambda_n},$$

ou

$$\bar{z}(p)=\frac{1}{L(p)}=\sum_{\nu=1}^{r}\frac{c_{1\nu}}{(p-\lambda_1)^\nu}+\sum_{\nu=r+1}^{n}\frac{c_\nu}{p-\lambda_\nu}. \tag{10.9}$$

Le produit de (10.9) par $(p-\lambda_1)^r$ donne

$$\frac{(p-\lambda_1)^r}{L(p)}=\frac{1}{L_r(p)}=c_{1r}+\sum_{\nu=1}^{r-1}c_{1\nu}(p-\lambda_1)^{r-\nu}+$$
$$+(p-\lambda_1)^r\sum_{\nu=r+1}^{n}\frac{c_\nu}{p-\lambda_\nu}. \tag{10.10}$$

D'où il résulte, lorsque $p\to\lambda_1$,

$$c_{1r}=s(\lambda_1)=\frac{1}{L_r(\lambda_1)}. \tag{10.11}$$

De façon analogue, en dérivant (10.10) $(r-\mu)$ fois $(\mu=1, 2, \ldots$ $\ldots, r-1)$ et en faisant tendre p vers λ_1, on obtient

$$c_{1\mu}=\frac{s_r^{(r-\mu)}(\lambda_1)}{(r-\mu)!}\quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1), \tag{10.12}$$

où

$$s_r(p)=\frac{1}{L_r(p)}.$$

De (10.11) et (10.12), il suit

$$c_{1\nu}=\frac{s^{(r-\nu)}(\lambda_1)}{(r-\nu)!}\quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{10.13}$$

On déterminerait de même les coefficients c_ν. Le produit de (10.9) par $(p - \lambda_\mu)$ $(\mu = r + 1, r + 2, \ldots, n)$ donne

$$\frac{p-\lambda_\mu}{L(p)} = (p-\lambda_\mu) \sum_{\nu=1}^{r} \frac{c_{1\nu}}{(p-\lambda_1)^\nu} + c_\mu + (p-\lambda_\mu) \sum_{\nu=r+1}^{n}{}' \frac{c_\nu}{p-\lambda_\nu},$$

où le symbole « prime » signifie comme toujours que la sommation ne s'étend pas aux termes pour lesquels $\mu = \nu$. En faisant $p = \lambda_\mu$, on obtient

$$c_\mu = \lim_{p \to \lambda_\mu} \frac{p-\lambda_\mu}{L(p)} = \lim_{p \to \lambda_\mu} \frac{1}{\dfrac{L(p)-L(\lambda_\mu)}{p-\lambda_\mu}} = \frac{1}{L'(\lambda_\mu)},$$

donc,

$$c_\nu = \frac{1}{L'(\lambda_\nu)} = \frac{1}{(\lambda_\nu - \lambda_1)^r L_r'(\lambda_\nu)}, \quad \nu = r+1, r+2, \ldots, n. \tag{10.14}$$

En vertu de (5.43) et (5.46), il vient

$$\bar{z}(p) = z(t) = \int_0^t e^{\lambda_1 \tau} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{c_{1\nu} \tau^{\nu-1}}{(\nu-1)!} d\tau + \int_0^t \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu \tau}}{L'(\lambda_\nu)} d\tau. \tag{10.15}$$

Enfin, la formule (5.47) entraîne

$$x_1(t) = \bar{z}(p) f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t z(t-\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{e_{1\nu}}{(\nu-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} e^{-\lambda_1 \tau} f(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \int_0^t e^{-\lambda_\nu \tau} f(\tau) d\tau. \tag{10.16}$$

En particulier, si λ_1 est un zéro simple de $L(p)$, i.e. $r = 1$, alors $c_{11} = \frac{1}{L'(\lambda_1)}$ et (10.16) entraîne (10.8).

Etudions maintenant l'équation homogène associée (10.1) avec les conditions initiales (10.2). En posant

$$x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0, \quad x_{n-1} = 1$$

dans (10.2), on déduit de (10.6)

$$x_2(t) = \frac{p}{L(p)} = \overline{\Psi}(p). \tag{10.17}$$

Pour la définition de la fonction $\overline{\Psi}(p) = \Psi(t)$, en vertu de (5.43), (10.7), (5.46), (10.9), il vient

$$\Psi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)} \tag{10.18}$$

ou

$$\Psi(t) = e^{\lambda_1 t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_{1\nu} t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)}. \tag{10.19}$$

De toute évidence, la fonction $\Psi(t)$ vérifie les conditions

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = \ldots = \Psi^{(n-2)}(0) = 0, \quad \Psi^{(n-1)}(0) = 1. \tag{10.20}$$

En mettant l'expression (10.6) sous la forme

$$x_2(t) = \frac{1}{L(p)} \sum_{k=0}^{n-1} x_k (p^{n-k} + a_1 p^{n-k-1} + a_2 p^{n-k-2} + \ldots + a_{n-k-1} p),$$

$$(a_0 = 0)$$

et en utilisant (10.3) et (10.20), on obtient la solution de l'équation homogène qui vérifie les conditions initiales (10.2)

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k [\Psi^{(n-k-1)}(t) + a_1 \Psi^{(n-k-2)}(t) + \ldots + a_{n-k-1} \Psi(t)]. \tag{10.21}$$

E x e r c i c e. Supposons que le circuit de la figure 40 a une résistance R, une inductance L et une capacité C. Ces éléments montés en série sont soumis à l'action d'une f.é.m. $E = E_0 \sin \omega t$. La valeur initiale du courant est $i(0) = i_0$. La charge initiale du condensateur $q(t)$ est $q(0) = q_0$. On demande $i(t)$.

En vertu des lois de Kirchhoff le courant $i(t)$ se détermine à partir de l'équation intégro-différentielle

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \left[q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau \right] = E_0 \sin \omega t$$

dont l'image opérationnelle est

$$Lp[\bar{i}(p) - i_0] + R\bar{i}(p) + \frac{1}{C} \left[q_0 + \frac{1}{p} \bar{i}(p) \right] = \frac{E_0 \omega p}{p^2 + \omega^2},$$

d'où

$$i(p) = \frac{E_0 \omega p^2}{(p^2 + \omega^2)\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)} + \frac{L i_0 p^2}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} - \frac{q_0(p)}{C\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)}. \tag{10.22}$$

Les opérateurs figurant dans la dernière égalité peuvent être exprimés à l'aide de fonctions élémentaires:

$$\frac{Li_0p^2}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}=\frac{i_0p^2}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L}\right)}=$$

$$=\frac{i_0\left(p+\frac{R}{2L}\right)p}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2}-\frac{i_0Rp}{2L\left[\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2\right]},$$

Fig. 40

où

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}.$$

En particulier, si $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$, alors

$$\frac{Li_0p^2}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}=i_0\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right)-\frac{i_0R}{2L}\,t\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right).$$

Pour $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}<0$, on a

$$\frac{Li_0p}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}=i_0\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right)\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{R^2}{2L^2}-\frac{1}{LC}}\,t\right)-$$

$$-\frac{i_0R}{2L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\,t\right).$$

et pour $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0$

$$\frac{Li_0p^2}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}=i_0\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right)\cos\omega_0t-\frac{i_0R}{2L\omega_0}\exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right)\sin\omega_0t.$$

Donc, la forme de la solution dépend de la relation qui lie R, L et C. Pour le dernier terme du second membre de (10.22), on a

$$\frac{q_0 p}{C\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}=\frac{q_0}{LC\omega_0}\exp\left(\frac{R}{2L}t\right)\sin\omega_0 t.$$

L'opérateur $\dfrac{E_0\omega p^2}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}$ admet le développement

$$\frac{E_0\omega p^2}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}=\frac{p\,(ap+b)}{p^2+\omega^2}+\frac{p\,(cp+d)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}},$$

d'où

$$E_0\omega p^2=p\,(ap+b)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)+p\,(cp+d)\,(p^2+\omega^2).$$

En égalant les coefficients en les mêmes puissances de p, on obtient

$$\frac{b}{C}+d\omega^2=0\,;\quad aR+bL+d=0\,;\quad \frac{a}{C}+bR+c\omega^2=E_0\omega\,;\quad aL+c=0.$$

d'où

$$a=-\frac{E_0X}{R^2+X^2},\quad b=\frac{\omega E_0R}{R^2+X^2},\quad c=\frac{E_0XL}{R^2+X^2},\quad d=-\frac{E_0R}{\omega C\,(R^2+X^2)},$$

où

$$X=\omega L-\frac{1}{\omega C}.$$

Soit

$$Z=R+iX,\quad \theta=\arg Z=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{X}{R}\right),$$

alors

$$a=-\frac{E_0\sin\theta}{|Z|},\quad b=\frac{\omega E_0\cos\theta}{|Z|},\quad c=\frac{E_0L\sin\theta}{|Z|},\quad d=-\frac{E_0\cos\theta}{\omega C\,|Z|}.$$

Et, on obtient les égalités

$$\frac{E_0\omega p^2}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}=\frac{\omega E_0\cos\theta p}{|Z|\,(p^2+\omega^2)}-\frac{p^2E_0\sin\theta}{|Z|\,(p^2+\omega^2)}+$$
$$+\frac{p^2E_0L\sin\theta}{|Z|\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}-\frac{E_0\cos\theta p}{\omega C\,|Z|\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}$$

et

$$\frac{E_0\omega p^2}{(p^2+\omega^2)\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)}=\frac{E_0}{|Z|}\sin(\omega t-\theta)+\frac{E_0}{|Z|}\sin(\theta)\,e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_0 t-$$
$$-\left(\frac{E_0R\sin\theta}{2L\omega_0\,|Z|}+\frac{E_0\cos\theta}{\omega\omega_0CL\,|Z|}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega_0 t.$$

La solution de l'équation intégro-différentielle est

$$i(t)=\frac{E_0}{|Z|}\sin(\omega t-\theta)+\left(i_0+\frac{E}{|Z|}\sin\theta\right)e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_0 t+$$

$$+\left(\frac{q_0}{LC\omega_0}-\frac{i_0R}{2L\omega_0}-\frac{E_0R\sin\theta}{2L\omega_0|Z|}-\frac{E_0\cos\theta}{\omega\omega_0CL|Z|}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega_0 t.$$

2. Systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants. Soit le système d'équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre, à coefficients constants (a_{ik}), résolu par rapport aux dérivées premières

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\
\frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n,
\end{aligned}\qquad(10.23)$$

$$t\in\,]0,\ \infty[.$$

On sait que tout système d'équations différentielles résolu par rapport aux dérivées supérieures des fonctions inconnues se ramène à un système d'équations de la forme (10.23). On cherchera la solution du système (10.23) qui vérifie les conditions initiales

$$x_1|_{t=0}=x_1^0,\quad x_2|_{t=0}=x_2^0,\ \ldots,\ x_n|_{t=0}=x_n^0.\qquad(10.24)$$

Le système (10.23) peut encore s'écrire

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}x_s,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\qquad(10.25)$$

A l'aide de la formule (10.3), ramenons le système (10.25) à un système d'équations algébriques

$$p\bar{x}_k(p)=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}x_i(p)+px_k^0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\qquad(10.26)$$

La forme développée du système (10.26) est

$$\begin{aligned}
(a_{11}-p)\bar{x}_1(p)+a_{12}\bar{x}_2(p)+\ldots+a_{1n}\bar{x}_n(p)&=-px_1^0,\\
a_{21}x_1(p)+(a_{22}-p)\bar{x}_2(p)+\ldots+a_{2n}\bar{x}_n(p)&=-px_2^0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}\bar{x}_1(p)+a_{n2}\bar{x}_2(p)+\ldots+(a_{nn}-p)\bar{x}_n(p)&=-px_n^0.
\end{aligned}\qquad(10.27)$$

Soit

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-p \end{vmatrix} \quad (10.28)$$

le déterminant du système (10.27), $\Delta_{ks}(p)$ le mineur de l'élément situé à l'intersection de la k-ième ligne et la s-ième colonne, i.e. le déterminant obtenu par suppression de la k-ième ligne et la s-ième colonne et multiplié par $(-1)^{k+s}$.

La solution du système d'équations (10.27) est de la forme

$$\bar{x}_s(p) = -p \sum_{k=1}^{n} x_k^0 \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (10.29)$$

Pour connaître $x_s(t)$ il faut trouver la fonction

$$\psi_{ks}(t) = \bar{\psi}_{ks}(p) = -p \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}. \quad (10.30)$$

La fonction $\psi_{ks}(t)$ se déduit sans peine du développement de $\bar{\psi}_{ks}(p)$ en fractions élémentaires. Ce développement implique à son tour la connaissance des racines de l'équation caractéristique

$$\Delta(p) = 0. \quad (10.31)$$

En définitive, on a

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k^0 \psi_{ks}(t), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (10.32)$$

La méthode développée peut être appliquée à l'intégration d'un système non homogène d'équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants, de la forme

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks} x_s + f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.33)$$

On demande la solution du système (10.33) qui vérifie les conditions initiales (10.24). L'image opérationnelle est

$$p\bar{x}_k(p) = p x_k^0 + \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \bar{x}_s(p) + \bar{f}_k(p). \quad (10.34)$$

Comme précédemment, on compose la solution du système d'équations linéaires (10.34)

$$\bar{x}_s(p) = -p \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^0 + \frac{\bar{f}_k(p)}{p} \right) \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}, \quad (10.35)$$

ou

$$\bar{x}_s(p) = -p\sum_{k=1}^{n} x_k^0 \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} - \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k(p)\frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}. \tag{10.36}$$

Compte tenu de (10.32), il vient

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[x_k^0\psi_{ks}(t) + \int_0^t f_k(\tau)\,\psi_{ks}(t-\tau)\,d\tau\right]. \tag{10.37}$$

De façon analogue, on pourrait considérer un système plus général d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}\frac{d^2x_k}{dt^2} + b_{\nu k}\frac{dx_k}{dt} + c_{\nu k}x_k\right) = f_\nu(t), \tag{10.38}$$

$$\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

avec les conditions initiales

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x_k'(0) = \beta_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{10.39}$$

L'image opérationnelle du système (10.38), avec les conditions (10.39), est un système d'équations algébriques en les fonctions inconnues $\bar{x}_k(p)$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2 + b_{\nu k}p + C_{\nu k})\,\bar{x}_k(p) = \bar{f}_\nu(p) + \sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2 + b_{\nu k}p)\,\alpha_k + a_{\nu k}p\beta_k,$$

$$\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{10.40}$$

Une fois qu'on a trouvé la solution de ce système, on obtient la solution du problème posé par passage à l'original.

Exemple 1. Trouver la solution du système de deux équations différentielles ordinaires linéaires

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ay + f(t),\\ \frac{dy}{dt} &= -ax + g(t),\end{aligned} \tag{10.41}$$

vérifiant les conditions initiales

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \tag{10.42}$$

L'image opérationnelle du système (10.41) avec les conditions (10.42) est

$$\begin{aligned}p\bar{x}(p) - a\bar{y}(p) &= \bar{f}(p),\\ a\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) &= \bar{g}(p).\end{aligned}$$

Trouvons la solution de ces équations. On a

$$\bar{x}(p) = \frac{p\bar{f}(p) + a\bar{g}(p)}{p^2 + a^2}, \quad \bar{y}(p) = \frac{-a\bar{f}(p) + p\bar{g}(p)}{p^2 + a^2}.$$

En appliquant les formules opérationnelles

$$\frac{ap}{p^2 + a^2} = \sin at, \quad \frac{p^2}{p^2 + a^2}\cos at,$$

on obtient la solution cherchée

$$x(t)=\int_0^t [f(\tau)\cos a(t-\tau)+g(\tau)\sin a(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$y(t)=\int_0^t [-f(\tau)\sin a(t-\tau)+g(\tau)\cos a(t-\tau)]\,d\tau.$$

Exemple 2. On demande la solution du système de trois équations ordinaires linéaires

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-x+y+z,\\ \frac{dy}{dt}&=x-y+z,\\ \frac{dz}{dt}&=x+y+z \end{aligned} \tag{10.43}$$

avec les conditions initiales

$$x(0)=1,\quad y(0)=0,\quad z(0)=0. \tag{10.44}$$

L'image opérationnelle du système (10.43) avec les conditions (10.44) est

$$\begin{aligned} (p+1)\,\bar{x}(p)-\bar{y}(p)-\bar{z}(p)&=p,\\ -\bar{x}(p)+(p+1)\,\bar{y}(p)-\bar{z}(p)&=0,\\ -x(p)-\bar{y}(p)+(p-1)\,\bar{z}(p)&=0, \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} \bar{x}(p)&=\frac{1}{3}\,\frac{p}{p+1}+\frac{1}{2}\,\frac{p}{p+2}+\frac{1}{6}\,\frac{p}{p-2},\\ \bar{y}(p)&=\frac{1}{3}\,\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}\,\frac{p}{p+2}+\frac{1}{6}\,\frac{p}{p-2},\\ \bar{z}(p)&=-\frac{1}{3}\,\frac{p}{p+1}+\frac{1}{3}\,\frac{p}{p-2}. \end{aligned}$$

La formule (5.43) donne la solution désirée:

$$\begin{aligned} x(t)&=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t},\\ y(t)&=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t},\\ z(t)&=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}. \end{aligned}$$

3. Equations différentielles ordinaires linéaires à coefficients variables. Dans certains cas, on peut appliquer le calcul opérationnel à la résolution d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients variables

$$x^{(n)}(t)+a_1(t)\,x^{(n-1)}(t)+a_2(t)\,x^{(n-2)}(t)+\ldots+a_n(t)\,x(t)=f(t). \tag{10.45}$$

On se limitera au cas où toutes les fonctions $a_i(t)$ sont des polynômes. Pour trouver l'image opérationnelle de l'équation, il suffit visiblement d'écrire celle de la fonction $t^k x^{(n)}(t)$. On sait que

$$tx(t) = -p\frac{d}{dp}\left[\frac{\bar{x}(p)}{p}\right]. \qquad (10.46)$$

En appliquant cette formule à la fonction $tx(t)$, on obtient

$$t^2x(t) = (-1)^2 p\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{\bar{x}(p)}{p}\right]. \qquad (10.47)$$

De façon analogue, on obtient aisément

$$t^3x(t) = (-1)^3 p\frac{d^3}{dp^3}\left[\frac{\bar{x}(p)}{p}\right], \qquad (10.48)$$

. . . .

$$t^kx(t) = (-1)^k p\frac{d^k}{dp^k}\left[\frac{\bar{x}(p)}{p}\right]. \qquad (10.49)$$

En développant l'opérateur $\frac{d^k}{dp^k}$ dans la dernière formule, on aura

$$t^kx(t) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{(k-\nu)!}{p^{k-\nu}} \bar{x}^{(\nu)}(p) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{k!}{\nu!} \frac{1}{p^{k-\nu}} \bar{x}^{(\nu)}(p). \qquad (10.50)$$

Pour obtenir l'image de la fonction $t^kx^{(r)}(t)$, il faut, dans (10.50), substituer à $\bar{x}(p)$ l'image de la fonction $x^{(r)}(t) = p^r\bar{x}(p) - p^rx(0) - p^{r-1}x'(0) - \ldots - px^{(r-1)}(0)$:

$$t^kx^{(r)}(t) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^{(\nu)}k!}{\nu!} \frac{[p^r\bar{x}(p) - p^rx(0) - \ldots - px^{(r-1)}(0)]^{(\nu)}}{p^{k-\nu}}. \qquad (10.51)$$

Avec les conditions initiales nulles

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(r-1)}(0) = 0, \qquad (10.52)$$

la formule (10.51) s'écrit

$$t^kx^{(r)}(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-p)^\nu k!}{\nu!} \frac{[p^r\bar{x}(p)]^\nu}{p^k}. \qquad (10.53)$$

A titre d'exemple, considérons l'équation de Tchebychev-l'Hermite

$x''(t) - tx'(t) + nx(t) = 0$ (n est un entier non négatif).

On cherchera la solution qui vérifie les conditions initiales suivantes

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \quad \text{si} \quad n = 2k,$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \quad \text{si} \quad n = 2k + 1.$$

En faisant $k = 1$ et $r = 1$ dans (10.51), on obtient

$$tx'(t) = -p\frac{d\bar{x}(p)}{dp}.$$

Donc, l'image de l'équation Tchebychev-l'Hermite est

$$p^2\left[\bar{x}(p) - x(0) - \frac{1}{p}x'(0)\right] + p\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + n\bar{x}(p) = 0,$$

ou

$$\frac{d\bar{x}(p)}{dp} = -\left(p + \frac{n}{p}\right)\bar{x}(p) + px(0) + x'(0);$$

d'où suit la solution

$$\bar{x}(p) = cp^{-n}e^{-\frac{p^2}{2}} + p^{-n}e^{-\frac{p^2}{2}}\int [px(0) + x'(0)]\,p^n e^{-\frac{p^2}{2}}\,dp. \quad (10.54)$$

Premier cas: $n = 2k$, i.e. n est pair, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$:

$$\bar{x}(p) = cp^{-2k}e^{-\frac{p^2}{2}} + p^{-2k}e^{-\frac{p^2}{2}}\int p^{2k+1}e^{\frac{p^2}{2}}\,dp.$$

Posons

$$I_k = \int p^{2k+1}e^{\frac{p^2}{2}}\,dp.$$

Une intégration par parties donne

$$I_k = \int p^{2k+1}e^{\frac{p^2}{2}}\,dp = \int p^{2k}d\left(e^{\frac{p^2}{2}}\right) = p^{2k}e^{\frac{p^2}{2}} - \int 2kp^{2k-1}e^{\frac{p^2}{2}}\,dp,$$

i.e.

$$I_k = p^{2k}e^{\frac{p^2}{2}} - 2kI_{k-1}.$$

Donc,

$$I_k = \frac{e^{p^2}}{2}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s 2^s s!\binom{k}{s}p^{2k-2s},$$

et

$$\bar{x}(p) = cp^{-2k}e^{-\frac{p^2}{2}} + \sum_{s=0}^{k}(-1)^s 2^s s!\binom{k}{s}p^{-2s}.$$

La fonction $f(p) = f(\sigma + i\tau) = cp^{-2k}e^{-\frac{p^2}{2}}$ n'est pas bornée lorsque $\tau \to \infty$ à σ fixe. En effet,

$$\frac{c}{p^{2k}}e^{-\frac{p^2}{2}} = \frac{c}{p^{2k}}e^{-\frac{(\sigma^2-\tau^2+2i\sigma\tau)}{2}} = \frac{c}{p^{2k}}e^{\frac{\tau^2-\sigma^2}{2}+i\sigma\tau},$$

donc

$$\left| \frac{c}{p^{2k}} e^{-\frac{p^2}{2}} \right| = \frac{c}{|p|^{2k}} e^{\frac{\tau^2-\sigma^2}{2}} \to \infty \text{ lorsque } \tau \to \infty.$$

D'où il suit que la fonction $f(p)$ n'est pas représentable par une ntégrale de Laplace lorsque $c \neq 0$; donc $c = 0$ et la solution est

$$x(t) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s! \binom{k}{s} \frac{t^{2s}}{(2s)!}.$$

On démontre que $x(t)$ est un polynôme de Tchebychev-l'Hermite à un facteur constant près.

Deuxième cas: $n = 2k + 1$, i.e. n est impair, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. On procède comme précédemment. De (10.54) il suit

$$\overline{x}(p) = cp^{-n} e^{-\frac{p^2}{2}} + p^{-n} e^{-\frac{p^2}{2}} \int p^n e^{\frac{p^2}{2}} dp,$$

où $n = 2k+1$. Or, l'intégrale $\int p^{2k+1} e^{\frac{p^2}{2}} dp$ vaut I_k, donc $c=0$ et la solution est

$$x(t) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 2^s s! \binom{k}{s} \left(\frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!} \right).$$

4. Equations différentielles à argument retardé. Soit l'équation différentielle à argument retardé à coefficients constants

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - h_k) + g(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad h_k \geqslant 0. \tag{10.55}$$

Pour simplifier, on supposera que les conditions initiales sont nulles, i.e. on cherchera la solution de l'équation (10.55) qui vérifie les conditions

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{10.56}$$

On suppose par ailleurs que

$$x(t) = x'(t) = \ldots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \quad \text{lorsque} \quad t < 0.$$

En tenant compte de

$$x^{(k)}(t - h_k) = p^k e^{-h_k p} x(t),$$

cherchons l'image de l'équation (10.55):

$$p^n x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-h_k p} x(t) + g(t),$$

d'où

$$x(t) = \frac{1}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-h_k p}} g(t).$$

Posons

$$\omega(p)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-h_k p}}{p^n};$$

il vient alors

$$x(t)=\frac{g(t)}{p^n}\,\frac{1}{1-\omega(p)}. \tag{10.57}$$

Pour prouver que (10.57) est la solution de l'équation (10.55) qui vérifie les conditions initiales (10.56), il suffit de montrer que l'opérateur $\frac{1}{1-\omega(p)}$ est réductible à une fonction. Il existe visiblement une constante Q, telle que pour tous les p du demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_0 > 0$ on a

$$|\omega(p)|<\frac{Q}{|p|}<1.$$

Mettons l'opérateur $\frac{1}{1-\omega(p)}$ sous la forme

$$\frac{1}{1-\omega(p)}=\left[1+\omega(p)+\frac{[\omega(p)]^2}{1-\omega(p)}\right]. \tag{10.58}$$

L'opérateur $[1+\omega(p)]$ se ramenant de toute évidence à une fonction, il suffit de montrer que l'opérateur $\frac{[\omega(p)]^2}{1-\omega(p)}$ se ramène à une fonction, ou ce qui revient au même, que la fonction de la variable complexe $p=\sigma+i\tau$

$$\frac{[\omega(p)]^2}{p[1-\omega(p)]} \tag{10.59}$$

est représentable par une intégrale de Laplace. En effet, dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_0 > 0$, la fonction $\frac{[\omega(p)]^2}{p(1-\omega(p))}$ est analytique et vérifie l'inégalité

$$\left|\frac{[\omega(p)]^2}{p(1-\omega(p))}\right|<\frac{\left(\frac{Q}{|p|}\right)^2}{|p|\left(1-\frac{Q}{|p|}\right)}=\frac{Q^2}{|p|^3\left(1-\frac{Q}{|p|}\right)},$$

donc la fonction (10.59) tend uniformément en $\arg p$ vers zéro lorsque $|p| \to \infty$ et l'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{[\omega(p)]^2}{p(1-\omega(p))}\right| d\tau \qquad (p=\sigma+i\tau)$$

est convergente. En vertu du théorème 3 (§ 2) il suit que la fonction $\frac{[\omega(p)]^2}{p(1-\omega(p))}$ est représentable par une intégrale de Laplace absolument convergente. Donc, l'opérateur $\frac{1}{1-\omega(p)}$ est réductible à une

fonction et la solution est donnée par la formule

$$x(t) = \frac{g(t)}{p^n} \sum_{m=0}^{\infty} [\omega(p)]^m,$$

où

$$\omega(p) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-h_k p}}{p^n}.$$

La fonction $x(t)$ est n fois dérivable et

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{n-1}(0) = 0.$$

5. Equations différentielles aux dérivées partielles. Soit l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(x) \frac{\partial^{\mu+\nu} u(x, t)}{\partial x^\mu \, \partial t^\nu} = f(x, t), \qquad (10.60)$$

dont les coefficients $a_{\mu\nu}(x)$ sont des fonctions numériques de la variable x.

La formule

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} u(x, t)}{\partial x^\mu \, \partial t^\nu} = p^\nu \frac{\partial^\mu u(x, t)}{\partial x^\mu} - p^\nu \frac{\partial^\mu u(x, 0)}{\partial x^\mu} - \\ - p^{\nu-1} \frac{\partial^{\mu+1} u(x, 0)}{\partial x^\mu \, \partial t} - \ldots - p \frac{\partial^{\mu+\nu-1} u(x, 0)}{\partial x^\mu \, \partial t^{\nu-1}},$$

ramène l'équation (10.60) à la forme

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu(x, p) \frac{\partial^\mu u(x, t)}{\partial x^\mu} = f(x, t) + \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu-1} p^{\nu-k} \frac{\partial^{\mu+k} u(x, 0)}{\partial x^\mu \, \partial t^k},$$

où

$$a_\mu = a_\mu(x, p) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}(x) \, p^\nu.$$

Désignant le second membre de cette équation par $\Phi(x, p)$ et considérant $u(x, t)$ comme une fonction opérationnelle de x, i.e. $u(x, t) = \overline{u}(x, p) = \overline{u}(x)$, on aura

$$\overline{a}_m \overline{u}^{(m)}(x) + a_{m-1} \overline{u}^{(m-1)}(x) + \ldots + a_0 \overline{u}(x) = \Phi(x, p), \quad (10.61)$$

où les coefficients a_k sont également des fonctions opérationnelles de x. Donc, l'intégration de l'équation (10.60) se ramène à celle d'une équation différentielle opérationnelle linéaire. L'équation (10.61) qui est l'image opérationnelle de l'équation (10.60) s'appelle *équation opérationnelle* ou équation transformée.

Pour résoudre l'équation (10.61) il y a intérêt à utiliser l'isomorphisme des corps $\mathfrak{M}(S)$ et $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. Dans le corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ l'équation

transformée (10.61) devient une équation différentielle ordinaire linéaire, d'ordre n, dont les coefficients et les seconds membres dépendent du paramètre p, qui est complexe. Ces équations ont été bien étudiées. Soit $\bar{u}(x; p)$ une solution de l'équation. Si pour des valeurs données de $x \in]\alpha, \beta[$ la solution $\bar{u}(x, p) \in \overline{\mathfrak{M}}(S)$, cela veut dire que $\bar{u}(x, p)$, où $p = \frac{1}{t}$, est solution de (10.60) dans le corps $\mathfrak{M}$.

Pour appliquer le calcul opérationnel à l'intégration des équations aux dérivées partielles, il faut:

1° remplacer l'équation primitive par sa transformée. Les conditions aux limites seront changées en des conditions aux limites transformées que devra vérifier la solution $\bar{u}(x, p)$ de l'équation transformée (10.61).

2° trouver la solution $\bar{u}(x, p)$ de l'équation transformée vérifiant les conditions aux limites transformées.

3° étudier la solution obtenue afin d'établir son appartenance au corps $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. Si $\bar{u}(x, p) \in \overline{\mathfrak{M}}(S)$ il faut procéder à une étude supplémentaire pour voir si la solution $u(x, t) = \bar{u}(x, p)$ est généralisée ou si elle peut être ramenée à une fonction possédant des dérivées partielles par rapport à x et t jusqu'à la dérivée $\frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n}$ incluse. Cette dernière circonstance signifiera que $u(x, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles primitive au sens classique.

4° trouver la fonction $u(x, t) = \bar{u}(x, p)$. L'étude du 3° est souvent simplifiée si le 4° est réalisé.

5° prouver que la solution $u(x, t)$ vérifie les conditions initiales et aux limites données.

Soit à titre d'exemple les équations

$$\rho(x) u_t = \rho_0(x) u_{xx} + \rho_1(x) u_x + \rho_2(x) u; \qquad (10.62)$$

$$\rho(x) u_{tt} = \rho_0(x) u_{xx} + \rho_1(x) u_x + \rho_2(x) u, \qquad (10.63)$$

$x \in [0, l[$, $t > 0$, où $\rho(x)$, $\rho_0(x)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $]0, l]$ et $\rho(x) > 0$. La solution $u(x, t)$ doit posséder sur $]0, l]$, $t > 0$, des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre inclus et vérifier les conditions initiales

$$\lim_{\to +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in]0, l], \qquad (10.64)$$

dans le cas de l'équation (10.62) et

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = \varphi(x), \quad \lim_{t \to +0} u_t(x, t) = \Psi(x), \; x \in]0, l], \qquad (10.65)$$

dans le cas de l'équation (10.63), ainsi que les conditions aux limites

$$\lim_{x \to +0} u(x, t) = f(t), \quad au_x(l, t) + bu_t(l, t) = cu(l, t) \qquad (10.66)$$

pour $t > 0$, où $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ sont des fonctions continues par morceaux données; $f(t)$ appartient à S et est continue pour $t > 0$; a, b et c des constantes données.

On cherchera la solution de ces équations sous la forme $u(x, t) = \bar{u}(x, p)$. Les équations transformées (10.62) et (10.63) s'écrivent

$$\rho_0(x)\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+\rho_1(x)\frac{d\bar{u}}{dx}+[\rho_2(x)-p\rho(x)]\bar{u}=-\rho(x)p\varphi(x); \qquad (10.67)$$

$$\rho_0(x)\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+\rho_1(x)\frac{d\bar{u}}{dx}+[\rho_2(x)-p^2\rho(x)]\bar{u}= \\ =-p^2\rho(x)\varphi(x)-p\rho(x)\Psi(x). \qquad (10.68)$$

Les conditions aux limites deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{u}(+0, p)=\bar{f}(p), \quad \text{où} \quad \bar{f}(p)=f(t), \\ &a\bar{u}_x(l, p)+bp[\bar{u}(l, p)-\varphi(l)]=c\bar{u}(l, p). \end{aligned}\right\} \qquad (10.69)$$

Théorème 1. *Soit* $\bar{u}(x, p)$ *la solution de l'équation* (10.67) *ou* (10.68) *vérifiant la condition* (10.69). *Supposons par ailleurs que*

1) *les opérateurs* $\bar{u}(x, p)$, $\bar{u}_x(x, p)$ *et* $\bar{u}_{xx}(x, p)$ *sont réductibles à des fonctions pour* $x \in]0, l]$;

2) *existe un nombre* σ_0 *tel que lorsque* $t \to \infty$, *l'on ait*

$$\bar{u}(x, p)=O(e^{\sigma_0 t}), \quad \bar{u}_x(x; p)=O(e^{\sigma_0 t}), \quad \bar{u}_{xx}(x, p)=O(e^{\sigma_0 t})$$

uniformément en x *sur tout intervalle* $[\varepsilon, l]$;

3) *existe un entier* $k \geqslant 0$ *tel que dans le corps* $\mathfrak{M}(S)$ $|p^{-k}\bar{u}(x, p)| < Q = \text{const}$ *pour tous les* x: $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon < l$, $\operatorname{Re} p > \sigma_1 > \sigma_0$;

4) *existe* $\lim\limits_{t\to+0} \bar{u}(x, p) = g(t)$, $t > 0$, $g(t)$ *étant une fonction continue pour* $t > 0$ *et bornée lorsque* $t \to 0$. *Alors* $u(x, t) = \bar{u}(x, p)$ *est la solution de l'équation* (10.62) *ou* (10.63) *qui vérifie les conditions initiales et aux limites données.*

D é m o n s t r a t i o n. Prouvons tout d'abord que les hypothèses du théorème entraîne l'existence des dérivées $u_x(x, t)$ et $u_{xx}(x, t)$ pour $x \in]0, l]$. En effet, supposons que $\bar{u}_x(x, p) = v(x, t)$. Il vient

$$\bar{u}(x, p)=p\int_0^\infty u(x, t)e^{-pt}\,dt; \qquad (10.70)$$

$$\bar{u}_x(x, p)=p\int_0^\infty v(x, t)e^{-pt}\,dt, \qquad (10.71)$$

et, de plus, en vertu de l'hypothèse 2) les intégrales sont absolument et uniformément convergentes en $x \in [\varepsilon, l]$ lorsque $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Donc la deuxième intégrale peut être intégrée sur x entre ε et l.

$$\bar{u}(x;\ p)-\bar{u}(\varepsilon,\ p)=p\int_0^\infty\left(\int_\varepsilon^y v(y,\ t)\,dy\right)e^{-pt}\,dt,\quad \operatorname{Re}p>\sigma_0,$$

ou

$$\bar{u}(x,\ p)=p\int_0^\infty\left[u(\varepsilon,\ t)+\int_\varepsilon^x v(y,\ t)\,dy\right]e^{-pt}\,dt,\ \operatorname{Re}p>\sigma_0.$$

Comparant la dernière intégrale avec (10.70), on obtient

$$u(x,\ t)=u(\varepsilon,\ t)+\int_\varepsilon^x v(y,\ t)\,dy,$$

d'où il suit que la solution $u(x,\ t)$ est dérivable par rapport à x et

$$u_x(x,\ t)=v(x,\ t)=\bar{u}_x(x;\ t),\ x\in\,]0,\ l]. \qquad (10.72)$$

Si maintenant l'on pose $\bar{u}_{xx}(x,\ p)=w(x,\ t)$ et que l'on tienne compte de l'hypothèse 2) du théorème et de (10.71), ainsi que de (10.72) dans laquelle il importe de remplacer $u(x,\ t)$ par $u_x(x,\ t)$ et $v(x,\ t)$ par $w(x,\ t)$, on obtient

$$u_{xx}(x,\ t)=w(x,\ t)=\bar{u}_{xx}(x,\ p)\ x\in\,]0,\ l], \qquad (10.73)$$

ce qui prouve l'existence des dérivées $u_x(x,\ t)$ et $u_{xx}(x,\ t)$. De (10.72) et (10.73), il suit

$$\rho_0 u_{xx}(x,\ t)+\rho_1(x)\,u_x(x,\ t)+\rho_2(x)\,u(x,\ t)=$$
$$=\rho_0\bar{u}_{xx}(x,\ p)+\rho_1(x)\,\bar{u}_x(x,\ p)+\rho_2(x)\,\bar{u}(x,\ p),$$

ou, compte tenu de l'équation transformée (10.68),

$$\rho_0(x)\,u_{xx}(x,\ t)+\rho_1(x)\,u_x(x,\ t)+\rho_2(x)\,u(x,\ t)=$$
$$=\rho(x)\,p^2\left[\bar{u}(x,\ p)-\varphi(x)-\frac{1}{p}\Psi(x)\right]=$$
$$=\rho(x)\,p^2\,[u(x,\ t)-\varphi(x)-t\Psi(x)]. \qquad (10.74)$$

De (10.73), (10.72) et la deuxième hypothèse du théorème, on déduit que la somme

$$\rho_0(x)\,u_{xx}(x,\ t)+\rho_1(x)\,u_x(x,\ t)+\rho_2(x)\,u(x,\ t)$$

appartient à S pour $x\in\,]0,\ l]$, donc la fonction

$$\rho(x)\,p^2\,[u(x,\ t)-\varphi(x)-t\Psi(x)]$$

appartient à S ; or $\rho(x)>0$ pour $x\in\,]0,\ l]$, donc l'opérateur

$$p^2\,[u(x,\ t)-\varphi(x)-t\Psi(x)]$$

se ramène à une fonction de S lorsque $x\in\,]0,\ l]$. Posons

$$p^2\,[u(x,\ t)-\varphi(x)-t\Psi(x)]=q(x,\ t)\in S,$$

il vient

$$u(x, t) - \varphi(x) - t\Psi(x) = \frac{1}{p^2} q(x, t) = \int_0^t (t-\xi) q(x; \xi) d\xi.$$

Donc la fonction $u(x, t)$ est deux fois dérivable par rapport à pour $x \in]0, l]$ et

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), \quad x \in]0, l].$$

De (10.74), il suit que lorsque $t > 0$ et $x \in]0, l]$, on a

$$\rho_0(x) u_{xx}(x, t) + \rho_1(x) u_x(x, t) + \rho_2(x) u(x, t) = \rho(x) u_{tt}.$$

On a donc montré que

$$u(x, t) = \overline{u}(x, p) \tag{10.75}$$

est la solution de l'équation (10.53) qui vérifie les conditions (10.65). A partir de (cf. (10.69))

$$a\overline{u}_x(l, p) + bp[\overline{u}(l, p) - \varphi(l) = c\overline{u}(l, p)$$

et des égalités (10.72) et (10.75) pour $x = l$, on déduit que

$$au_x(l, t) + bu_t(l, t) = cu(l, t),$$

i.e. les conditions aux limites sont réalisées pour $x = l$.

Reste à étudier le comportement de la solution lorsque $x \to 0$. Posons

$$\lim_{x \to +0} u(x, t) = g(t).$$

En vertu de la quatrième hypothèse du théorème, cette limite existe et est une fonction continue pour $t > 0$, et $g(t)$ est bornée lorsque $t \to 0$. Il reste donc à démontrer seulement que $g(t) = f(t)$, $t > 0$. Or ceci découle immédiatement de la condition $\overline{u}(+o, p) = \overline{f}(p)$ (cf. (10.69)) et de l'hypothèse 3) du théorème. En effet, cette hypothèse implique la continuité de la fonction opérationnelle $\overline{u}(x, p)$ pour $x \in [0, l]$. D'où il vient

$$\lim_{x \to 0} \overline{u}(x, p) = \overline{u}(o, p) = \overline{f}(p) = \overline{f}(t), \quad \text{i.e. } g(t) = f(t).$$

R e m a r q u e. Pour démontrer que $f(t) = g(t)$ on peut ne pas faire intervenir la notion de fonction opérationnelle continue mais utiliser directement les hypothèses 3) et 4) du théorème. En effet, pour les grands n, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\overline{u}(x, p)}{p^{n+1}} e^{pt} dp = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} u(x, \xi) d\xi, \tag{10.76}$$

la dernière intégrale étant uniformément et absolument convergente en $x \to 0$. Donc, on peut passer à la limite lorsque $x \to 0$ et on

obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\bar f(p)}{p^{n+1}}e^{pt}\,dp=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}g(\xi)\,d\xi,$$

ou

$$\int_0^t (t-\xi)^{n-1}f(\xi)\,d\xi=\int_0^t (t-\xi)^{n-1}g(\xi)\,d\xi,$$

d'où $f(t) = g(t)$ pour tous les $t > 0$.

§ 11. Application du calcul opérationnel à la résolution de quelques problèmes de physique mathématique

1. Circuits électriques. On étudiera des circuits électriques constitués d'un nombre fini de branches. Chaque branche sera composée d'une résistance R, d'une capacité C et d'une inductance L, montées en série (fig. 41). Les points de concours des branches sont appelés nœuds du circuit. Les inductances respectives des branches sont négligées. Dans la suite, en principe on supposera qu'à l'instant initial $t = 0$, les courants et les charges sont nuls.

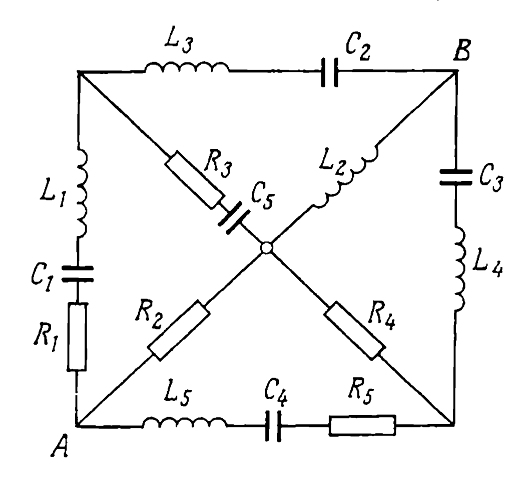


Fig. 41

On sait que si une f.é.m. E est appliquée à l'instant $t = 0$ dans un circuit composé d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C, montées en série, le courant i est déterminé à tout instant à partir du système d'équations

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E,\quad \frac{dQ}{dt}=i, \tag{11.1}$$

où $Q = Q(t)$ est la charge du condensateur. En posant $i(0) = 0$ et $Q(0) = 0$ et en remplaçant dans (11.1) la dérivation par l'opérateur p, on obtient le système d'équations

$$(Lp+R)\,i+\frac{Q}{C}=E,\ \ pQ=i,$$

d'où

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)i=E.$$

Si l'on pose

$$Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp},$$

on obtient

$$Z(p)\,i = E. \qquad (11.2)$$

L'opérateur $Z(p)$ est appelé *résistance opérationnelle* ou *impédance du circuit* de la fig. 42. S'agissant d'un circuit arbitraire on appellera résistance opérationnelle entre A et B l'opérateur $Y(p)$, tel que

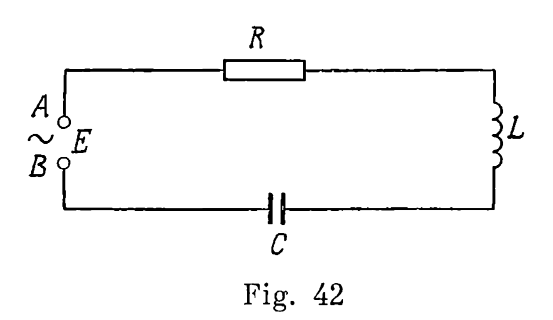


Fig. 42

$$Y(p)\,i(t) = E, \quad t > 0, \qquad (11.3)$$

où $i = i(t)$ est le courant débité par l'application de la f.é.m. E aux points A et B à l'instant $t = 0$. On suppose qu'à l'instant initial les courants et les charges sont nuls. L'équation (11.2) se déduit à partir des lois de Kirchhoff.

Première loi de Kirchhoff : *la somme algébrique de tous les courants aboutissant à un nœud du circuit est nulle.*

Deuxième loi de Kirchhoff: *la somme algébrique des chutes de tension dans les branches d'un circuit fermé est nulle.*

Si l'on a deux circuits électriques de résistances opérationnelles respectives $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$, on peut construire un nouveau circuit

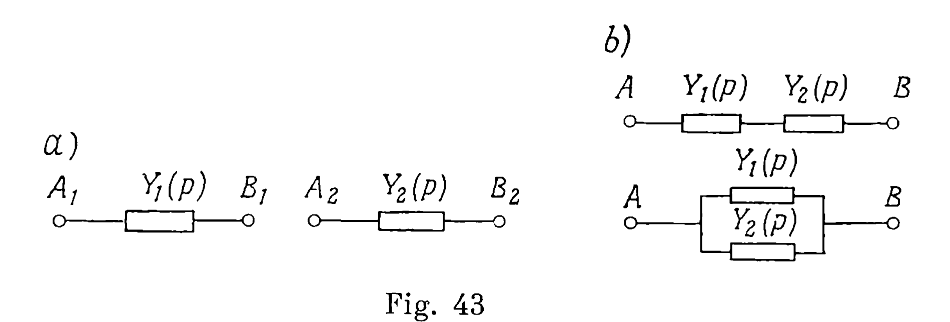


Fig. 43

en les montant en série ou en dérivation (fig. 43, a, b).

M o n t a g e e n d é r i v a t i o n. Si aux extrémités A et B de ces circuits on applique une f.é.m. E, on aura

$$Y_1(p)\,i_1 = E\,; \quad i_1 = \frac{1}{Y_1(p)}\,E\,; \quad Y_2(p)\,i_2 = E\,; \quad i_2 = \frac{1}{Y_2(p)}\,E,$$

donc,

$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{Y_1(p)} + \frac{1}{Y_2(p)}\right) E$$

et

$$\frac{i}{\dfrac{1}{Y_1(p)} + \dfrac{1}{Y_2(p)}} = E, \quad \text{ou} \quad \frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p) + Y_2(p)}\,i = E.$$

Ainsi, la résistance opérationnelle $Y(p)$ d'un circuit constitué de deux branches en dérivation, de résistances opérationnelles res-

pectives $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$, est égale à

$$Y(p)=\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}, \text{ ou } \frac{1}{Y(p)}=\frac{1}{Y_1(p)}=\frac{1}{Y_2(p)}. \qquad (11.4)$$

Les quantités $\frac{1}{Y(p)}$, $\frac{1}{Y_1(p)}$, $\frac{1}{Y_2(p)}$ sont appelées *conductances opérationnelles* du circuit. Donc, dans un montage en dérivation la conductance du circuit est égale à la somme des conductances opérationnelles de chaque branche.

M o n t a g e e n s é r i e. La deuxième loi de Kirchhoff donne

$$Y_1(p)\,i+Y_2(p)\,i=E \quad \text{ou} \quad (Y_1(p)+Y_2(p))\,i=E.$$

Donc, la résistance opérationnelle $Y(p)$ d'un circuit formé de deux branches en série, de résistances opérationnelles respectives $Y_1(p)$ et $Y_2(p)$, est égale à leur somme, i.e.

$$Y(p)=Y_1(p)+Y_2(p). \qquad (11.5)$$

En d'autres termes, dans le montage en série, la résistance opérationnelle du circuit est égale à la somme des résistances opérationnelles de chaque branche.

Ces deux règles permettent souvent de calculer très rapidement la résistance opérationnelle de circuits complexes. Soit par exemple

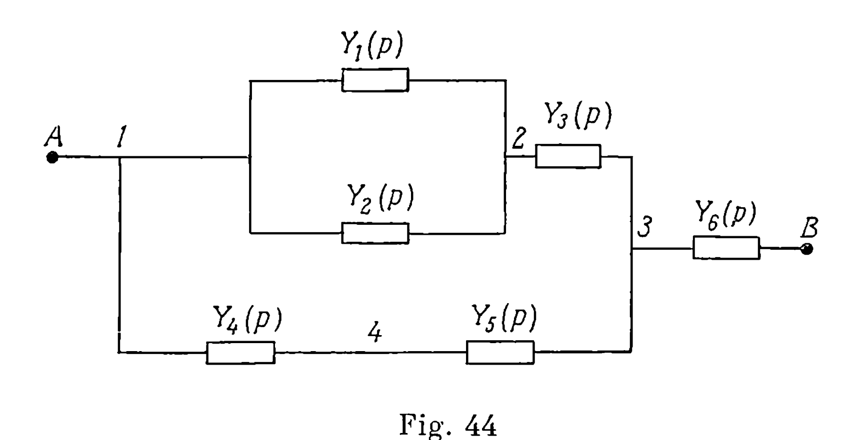


Fig. 44

à déterminer la résistance opérationnelle du circuit de la figure 44. Entre les points *1* et *2*, la résistance opérationnelle est visiblement égale à $\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}$. Donc la résistance opérationnelle de la branche *1-2-3* vaut

$$\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}+Y_3(p).$$

La résistance opérationnelle de la branche *1-4-3* est $Y_4(p)+Y_5(p)$, celle de la branche *1-3* est égale à

$$\frac{\left(\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}+Y_3(p)\right)(Y_4(p)+Y_5(p))}{\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1+Y_2(p)}+Y_3(p)+Y_5(p)}$$

La résistance opérationnelle de la branche AB vaut donc

$$\frac{\left(\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}+Y_3(p)\right)(Y_4(p)+Y_5(p))}{\frac{Y_1(p)\,Y_2(p)}{Y_1(p)+Y_2(p)}+Y_3(p)+Y_4(p)+Y_5(p)}+Y_6(p).$$

Les circuits ne sont pas tous forcément une combinaison de montages en dérivation et en série. La résistance opérationnelle du circuit de la fig. 45 ne peut pas être calculée avec les règles précé-

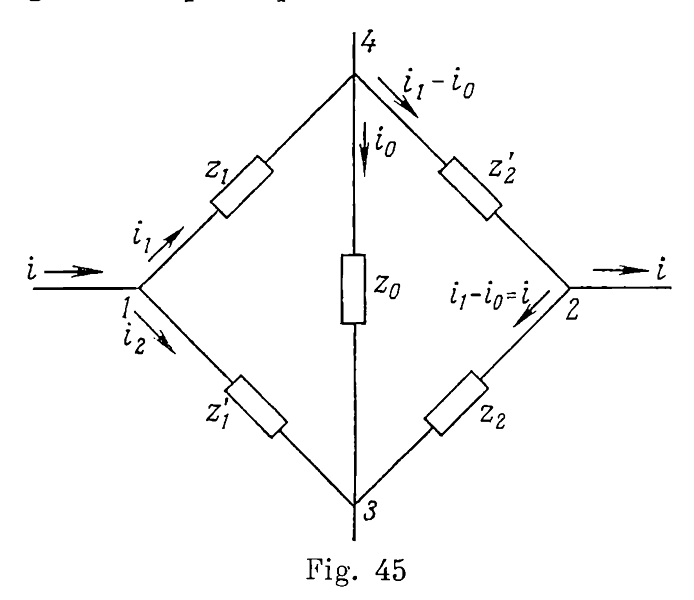


Fig. 45

dentes. Un tel circuit est dit *quadripolaire*. On distingue ici deux bornes d'entrée (*1* et *2*) et deux bornes de sortie (*3* et *4*). Il faut se servir des lois de Kirchhoff pour déterminer la résistance opérationnelle aux bornes d'entrée ou de sortie.

Les valeurs et les sens des courants sont déterminés à l'aide de la première loi de Kirchhoff. On a visiblement $i = i_1 + i_2$. La deuxième loi de Kirchhoff donne

$$Z_1 i_1 + Z_2' (i_1 - i_0) + Z_2 (i_1 - i_0 - i) = Z_1' i_2;$$
$$Z_0 i_0 - Z_1' i_2 + Z_1 i_1 = 0.$$

Ajoutons l'équation

$$i = i_1 + i_2$$

aux deux précédentes. Le système de trois équations ainsi obtenu nous donne i_1, i_2 et i_0. On a $i_2 = i - i_1$, donc,

$$Z_1 i_1 + Z_2' (i_1 - i_0) + Z_2 (i_1 - i_0 - i) = Z_1' (i - i_1);$$
$$Z_0 i_0 - Z_1' (i - i_1) + Z_1 i_1 = 0$$

ou

$$(Z_1 + Z_2' + Z_2 + Z_1') i_1 - (Z_2' + Z_2) i_0 = (Z_1' + Z_2) i;$$
$$(Z_1' + Z_1) i_1 + Z_0 i_0 = Z_1' i.$$

Le déterminant du système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2' & -(Z_2 + Z_2') \\ Z_1 + Z_1' & Z_0 \end{vmatrix};$$

donc, par conséquent

$$i_1 = \frac{i \begin{vmatrix} Z_1' + Z_2 & -(Z_2 + Z_2') \\ Z_1' & Z_0 \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{Z_0 (Z_1' + Z_2) + Z_1' (Z_2 + Z_2')}{Z_0 (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') + (Z_1 + Z_1') (Z_2 + Z_2')} i; \qquad (11.6)$$

$$i_0 = \frac{i \begin{vmatrix} Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2' & Z_1' + Z_2 \\ Z_1 + Z_1' & Z_1' \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{Z_1' (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') - (Z_1 + Z_1') (Z_1' + Z_2)}{Z_0 (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') + (Z_1 + Z_1') (Z_2 + Z_2')} i; \qquad (11.7)$$

$$i_2 = i - i_1 =$$

$$= \frac{Z_0 (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') + (Z_1 + Z_1') (Z_2 + Z_2') - Z_0 (Z_1' + Z_2) - Z_1' (Z_2 + Z_2')}{Z_0 (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') + (Z_2 + Z_1') (Z_2 + Z_2')} i =$$

$$= \frac{Z_0 (Z_1 + Z_2') + Z_1 (Z_2 + Z_2')}{Z_0 (Z_1 + Z_1' + Z_2 + Z_2') + (Z_1 + Z_1') (Z_2 + Z_2')} i. \qquad (11.8)$$

Sachant i_1, i_2 et i_0, il est aisé de calculer la résistance opérationnelle entre deux nœuds quelconques du circuit. Considérons le cas parti-

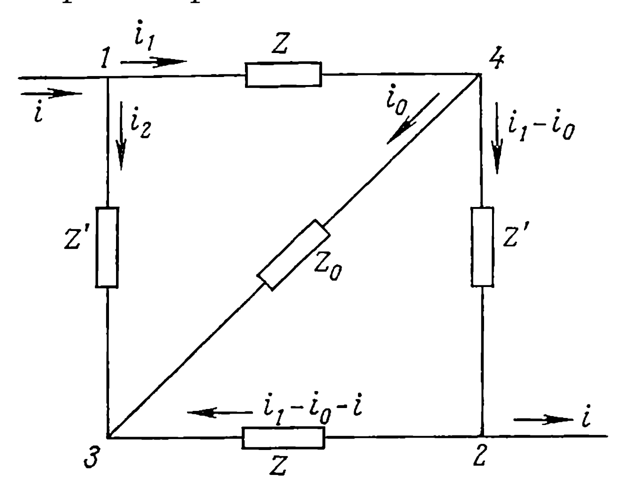


Fig. 46

culier simple: $Z_2 = Z_1 = Z$ et $Z_2' = Z_1' = Z'$ (fig. 46). Il vient

$$i_1 = \frac{Z_0 (Z + Z') + Z' (Z + Z')}{2Z_0 (Z + Z') + (Z + Z')^2} i = \frac{Z_0 + Z'}{2Z_0 + Z + Z'} i; \qquad (11.9)$$

$$i_2 = \frac{Z_0 (Z + Z') + Z (Z + Z')}{2Z_0 (Z + Z') + (Z + Z')^2} i = \frac{Z_0 + Z}{2Z_0 + Z + Z'} i; \qquad (11.10)$$

$$i_0 = \frac{2Z' (Z + Z') - (Z + Z')^2}{2Z_0 (Z + Z') + (Z + Z')^2} i = \frac{Z' - Z}{2Z_0 + Z + Z'} i. \qquad (11.11)$$

Pour calculer la résistance opérationnelle entre *1* et *2*, désignons par E la tension entre ces nœuds. En vertu de la deuxième loi de Kirchhoff, on a sur le circuit *1-4-2*

$$Zi_1 + Z'(i_1 - i_0) = E,$$

d'où, en substituant à i_1 et i_0 leurs expressions (11.9) et (11.11),

$$\frac{Z(Z_0+Z')}{2Z_0+Z+Z'}\,i + \frac{Z'(Z_0+Z'-Z'+Z)}{2Z_0+Z+Z'}\,i = E,$$

ou

$$\frac{Z(Z_0+Z')+Z'(Z_0+Z)}{2Z_0+Z+Z'}\,i = E.$$

Donc, la résistance opérationnelle du circuit *1-2* vaut

$$Y(p) = \frac{Z(Z_0+Z')+Z'(Z_0+Z)}{2Z_0+Z+Z'}. \qquad (11.12)$$

Remarquons en conclusion que dans le circuit de la fig. 46, on a la relation suivante entre les courants i, i_0, i_1 et i_2:

$$i_1 = \frac{i+i_0}{2} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{i-i_0}{2}. \qquad (11.13)$$

Ces égalités résultent de (11.9), (11.10) et (11.11). A remarquer que si l'on tient compte de la disposition symétrique des résistances opérationnelles Z, Z' et Z_0 dans le circuit de la figure 46, on peut déduire immédiatement la relation (11.13). En effet, $-i_1 = i_1 - i_0 - i$ et $i_2 = i_1 - i_0$, d'où suit l'équation (11.13).

Considérons maintenant un circuit plus complexe (fig. 47). Les valeurs et les sens des courants $i_1, i_2, \ldots, i_N, i_{N+1}$ sont choisis en vertu de la première loi de Kirchhoff. La deuxième loi nous donne $N+1$ équations pour la détermination des inconnues $i_1, i_2, \ldots, i_N, i_{N+1}$. Considérons la n-ième branche du circuit électrique. Soient E_n la tension aux bornes d'entrée *1* et *2* et $Y_n(p)$ la résistance opérationnelle du circuit branché aux bornes *3* et *4*. Ceci posé, le schéma de la n-ième branche coïncide avec celui de la fig. 46, sauf qu'il faut remplacer Z par Z_n, Z' par Z'_n et Z_0 par $Y_n(p)$.

De (11.13) on déduit la valeur des courants dans les diverses branches du circuit:

$$\frac{i_n - i_{n+1}}{2} \text{ dans le circuit } 1\text{-}3;\quad \frac{i_n + i_{n+1}}{2} \text{ dans le circuit } 2\text{-}3.$$

$$\frac{i_n + i_{n+1}}{2} \text{ dans le circuit } 1\text{-}4 \text{ et } \frac{i_n - i_{n+1}}{2} \text{ dans le circuit } 4\text{-}2.$$

Ayant ceci en vue on peut former sans peine l'équation des courants (cf. fig. 47).

La deuxième loi de Kirchhoff donne dans le circuit fermé 3_{n-1}-2_{n-1}-4_{n-1}-1_n-4_n-2_n-3_{n-1}

$$\left(\frac{i_{n-1}+i_n}{2}\right) Z_{n-1} - \left(\frac{i_{n-1}-i_n}{2}\right) Z'_{n-1} + \left(\frac{i_n+i_{n+1}}{2}\right) Z_n + \\ + \left(\frac{i_n-i_{n+1}}{2}\right) Z'_n = 0.$$

De façon analogue, on a dans les circuits A-1_1-3_1-2_1-B et 4_N-2_N-3_N-4_N :

$$\frac{Z_0}{2} i_1 + Z'_1 \left(\frac{i_1-i_2}{2}\right) + Z_1 \left(\frac{i_1+i_2}{2}\right) + \frac{Z_0}{2} i_1 = E;$$

$$Z'_n \left(\frac{i_N-i_{N+1}}{2}\right) - Z_N \left(\frac{i_N+i_{N+1}}{2}\right) - Z'_0 i_{N+1} = 0.$$

On a donc

$$(Z_{n-1} - Z'_{n-1})\, i_{n-1} + (Z_{n-1} + Z'_{n-1} + Z_n + Z'_n)\, i'_n + \\ + (Z_n - Z'_n)\, i_{n+1} = 0, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, N. \quad (11.14)$$

Par ailleurs,

$$(Z_1 + Z'_1 + 2Z_0)\, i_1 + (Z_1 - Z'_1)\, i_2 = 2E\,; \quad (11.15)$$

$$(Z_N - Z'_N\, i_N + (Z_N + Z'_N + 2Z'_0)\, i_{N+1} = 0. \quad (11.16)$$

Pour déterminer i_n, il faut résoudre l'équation aux différences (11.14) avec les conditions aux limites (11.15) et (11.16). Voyons en détail

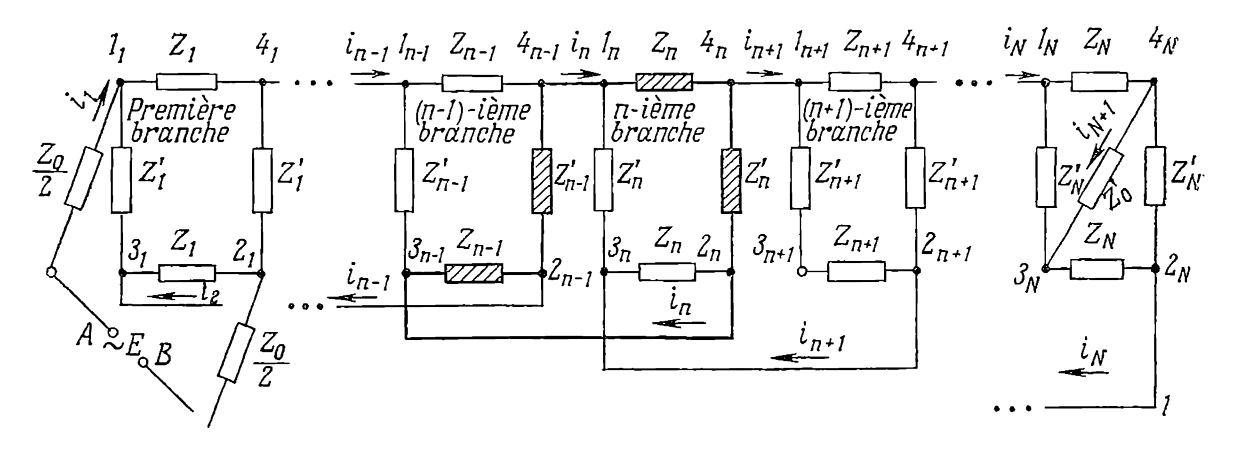


Fig. 47

le cas particulier où les coefficients de l'équation aux différences sont constants. Supposons que

$$Z_k = Z, \quad k = 1, 2, \ldots, N; \quad Z'_k = Z', \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Les équations (11.14), (11.15) et (11.16) s'écrivent alors

$$(Z - Z')\, i_{n-1} + 2\,(Z + Z') i_n + (Z - Z')\, i_{n+1} = 0; \quad (11.17)$$

$$(Z + Z' + 2Z_0)\, i_1 + (Z - Z')\, i_2 = 2E\,; \quad (11.18)$$

$$(Z - Z')\, i_N + (Z + Z' + 2Z'_0)\, i_{N+1} = 0. \quad (11.19)$$

On cherchera la solution de l'équation (11.17) sous la forme $i_n = A^n$. En portant $i_n = A^n$ dans (11.17) et en simplifiant par A^{n-1}, on obtient

$$(Z-Z')+2(Z+Z')A+(Z-Z')A^2=0; \quad A^2+2\frac{Z+Z'}{Z-Z'}A+1=0,$$

d'où

$$A=-\frac{Z+Z'}{Z-Z'}\pm\sqrt{\left(\frac{Z+Z'}{Z-Z'}\right)^2-1}=$$

$$=-\frac{Z+Z'}{Z-Z'}\pm\sqrt{\frac{4ZZ'}{(Z-Z')^2}}=\frac{-(Z+Z')\pm 2\sqrt{ZZ'}}{(Z-Z')}=$$

$$=-\frac{(\sqrt{Z}\mp\sqrt{Z'})^2}{Z-Z'};$$

$$A_1=-\frac{(\sqrt{Z}-\sqrt{Z'})^2}{(\sqrt{Z}+\sqrt{Z'})(\sqrt{Z}-\sqrt{Z'})}=-\frac{\sqrt{Z}-\sqrt{Z'}}{\sqrt{Z}+\sqrt{Z'}};$$

$$A_2=-\frac{(\sqrt{Z}+\sqrt{Z'})^2}{(\sqrt{Z}+\sqrt{Z'})(\sqrt{Z}-\sqrt{Z'})}=-\frac{\sqrt{Z}+\sqrt{Z'}}{\sqrt{Z}-\sqrt{Z'}}.$$

La solution générale est donc

$$i_n=M_1\left(\frac{\sqrt{Z'}-\sqrt{Z}}{\sqrt{Z'}+\sqrt{Z}}\right)^n+M_2\left(\frac{\sqrt{Z'}+\sqrt{Z}}{\sqrt{Z'}-\sqrt{Z}}\right)^n.$$

Portons cette solution dans (11.18) et (11.19) pour déterminer les opérateurs M_1 et M_2. On obtient le système d'équations en M_1 et M_2:

$$[(Z+Z'+2Z_0)A_1+(Z-Z')A_1^2]M_1+$$
$$+[(Z+Z'+2Z_0)A_2+(Z-Z')A_2^2]M_2=2E;$$

$$[(Z-Z')A_1^N+(Z+Z'+2Z_0')A_1^{N+1}]M_1+$$
$$+[(Z-Z')A_2^N+(Z+Z'+2Z_0')A_2^{N+1}]M_2=0. \qquad (11.20)$$

Voyons à titre d'exemple le cas où (cf. fig. 47)

$$Z_0=\frac{\lambda}{2p}; \quad Z=\frac{\lambda}{2p}; \quad Z'=2p\lambda; \quad Z_0'=\lambda.$$

On a alors

$$A_1=\frac{\sqrt{2p\lambda}-\sqrt{\frac{\lambda}{2p}}}{\sqrt{2p\lambda}+\sqrt{\frac{\lambda}{2p}}}=\frac{2p-1}{2p+1}; \quad A_2=\frac{2p+1}{2p-1}.$$

Les équations (11.20) s'écrivent :

$$\left[\left(\frac{3}{2p}+2p\right)-\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-2p\right)\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^2\right]M_1+$$

$$+\left[\left(\frac{3}{2p}+2p\right)\left(\frac{2p+1}{2p-1}\right)+\left(\frac{1}{2p}-2p\right)\left(\frac{2p+1}{2p-1}\right)^2\right]M_2=\frac{2}{\lambda}E,$$

$$\left[\left(\frac{1}{2p}-2p\right)\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^N+\left(\frac{1}{2p}+2p+2\right)\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{N+1}\right]M_1+$$

$$+\left[\left(\frac{1}{2p}-2p\right)\left(\frac{2p+1}{2p-1}\right)^N+\left(\frac{1}{2p}+2p+2\right)\left(\frac{2p+1}{2p-1}\right)^{N+1}\right]M_2=0.$$

On remarquera que le coefficient en M_1 est nul dans la dernière équation. En effet,

$$\left(\frac{1}{2p}-2p\right)\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^N+\left(\frac{1}{2p}+2p+2\right)\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{N+1}=$$

$$=\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{N+1}\left[\frac{(1-4p^2)(2p+1)}{2p(2p-1)}+\frac{1}{2p}+2p+2\right]=$$

$$=\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{N+1}\left[-\frac{(2p+1)(2p+1)}{2p}+\frac{1+4p^2+4p}{2p}\right]=$$

$$=\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{N+1}\left[\frac{-(2p+1)^2+(2p+1)^2}{2p}\right]=0,$$

donc $M_2 = 0$. Calculons M_1:

$$\left[\frac{(3+4p^2)(2p-1)}{2p(2p+1)}+\frac{(1-4p^2)(2p-1)^2}{2p(2p+1)^2}\right]M_1=\frac{2}{\lambda}E;$$

$$\frac{1}{2p}\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)[3+4p^2-4p^2+4p-1]\,M_1=$$

$$=\frac{1}{2p}\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)2(1+2p)\,M_1=\frac{2}{\lambda}E;$$

$$\frac{1}{2p}(2p-1)\,M_1=\frac{E}{\lambda},\quad \text{d'où}\quad M_1=\frac{2pE}{(2p-1)\lambda}.$$

Et

$$i_n=M_1A_1^n=\frac{2pE}{\lambda(2p-1)}\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^n=\frac{2Ep}{\lambda(2p+1)}\left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^{n-1};$$

$$i_n=\frac{Ep}{\lambda\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{p-\frac{1}{2}}{p+\frac{1}{2}}\right)^{n-1}.$$

En utilisant la formule $\left(1 = \frac{1}{p}\right)^n = L_n(t)$, on obtient

$$e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)=\frac{p}{p+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right)^n=\frac{p}{p+\frac{1}{2}}\left(\frac{p-\frac{1}{2}}{p+\frac{1}{2}}\right)^n;$$

donc, la solution cherchée est de la forme

$$i_n(t)=\frac{E}{\lambda}L_{n-1}(t)\,e^{-\frac{t}{2}},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ N+1.$$

2. Problèmes de physique mathématique. Appliquons les méthodes du calcul opérationnel à la résolution de quelques problèmes.

Problème 1. Trouver la distribution de la température dans une tige semi-infinie, $x\in\,]0,\infty[$ sachant que la température de l'extrémité gauche est constante et égale à zéro et la température initiale égale à l'unité.

On demande la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x>0,\quad t>0),\tag{11.21}$$

qui vérifie les conditions

$$u=0\quad\text{pour}\quad x=0,\ t>0\tag{11.22}$$

$$u=1\quad\text{pour}\quad x>0,\ t=0.\tag{11.23}$$

L'image de l'équation (11.21) est

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}=p\bar{u}-p\quad (x>0)\tag{11.24}$$

avec la condition

$$\bar{u}(x,\ p)=0\quad\text{pour}\quad x=0\tag{11.25}$$

La solution générale de (11.24) est

$$\bar{u}(x,\ p)=1+Ae^{x\sqrt{p}}+Be^{-x\sqrt{p}},\tag{11.26}$$

où les « constantes » A et B dépendent généralement de p et se déterminent à partir des conditions aux limites. La limitation de la solution lorsque $x\to\infty$ entraîne que $A=0$. De (11.25) il vient $0=1+B$. Donc,

$$\bar{u}(x,\ p)=1-e^{-x\sqrt{p}}.$$

Dans ce cas le théorème d'inversion donne (cf. § 2)

$$u(x,\ t)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}\left\{\frac{1}{p}-\frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p}\right\}e^{pt}\,dp,\tag{11.27}$$

On sait que (cf. § 2) l'inverse de $\frac{1}{p}$ est la fonction $f(t)\equiv 1$ pour $t>0$.

Déterminons l'inverse de la fonction $\frac{1}{p}e^{-x\sqrt{p}}$, i.e. calculons l'intégrale

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}\frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p}e^{pt}\,dp,\qquad \sigma>0.$$

La fonction $\frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p}}$ est analytique sur le plan tout entier des p sauf en l'origine des coordonnées, donc elle est univalente et analytique dans le plan muni d'une coupure le long de la partie négative de l'axe réel. En vertu du théorème de Cauchy on peut remplacer l'intégration le long de la droite $(\sigma - i\tau, \sigma + i\tau)$ par une intégration le long d'une courbe quelconque d'extrémités $\sigma \pm i\tau$ ne coupant pas la coupure. En particulier, il est commode d'étendre l'intégration au contour de la figure 48; ce qui donne

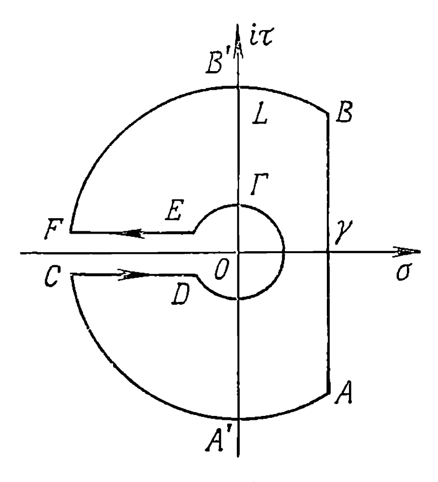


Fig. 48

$$\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}. \tag{11.28}$$

Montrons que les intégrales $\int_{AC}$ et $\int_{FB}$ tendent vers zéro lorsque $\tau \to \infty$. On a

$$\left| \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p} \right| = \frac{e^{-x \operatorname{Re}\sqrt{p}}}{|p|} \quad (-\pi < \arg p < \pi),$$

donc $-\frac{\pi}{2} < \arg\sqrt{p} < \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\operatorname{Re}\sqrt{p} \geqslant 0$; pour $x \geqslant 0$, il vient alors

$$\left| \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p} \right| \leqslant \frac{1}{|p|}.$$

En vertu du lemme de Jordan, lorsque $t > 0$ et $R \to \infty$, l'intégrale de la fonction $\frac{e^{-x\sqrt{p}+pt}}{p}$ étendue aux arcs AC et FB tend vers 0.

Calculons les intégrales étendues aux droites CD et EF. Sur ces droites $\sqrt{p}$ vaut $i\sqrt{|p|}$ et $-i\sqrt{|p|}$ respectivement. En posant $\rho = |p|$ on aura

$$\int_{CD} + \int_{EF} = -2i \int_r^R \rho^{-1} \sin(x\rho^{\frac{1}{2}})\, e^{-t\rho}\, d\rho = -4i \int_{r^{1/2}}^{R^{1/2}} \frac{\sin x\xi}{\xi} e^{-t\xi^2}\, d\xi, \tag{11.29}$$

donc existe la limite

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left\{ \int_{CD} + \int_{EF} \right\} \left(\frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p}} e^{pt} \right) dp = -4i \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi} e^{-t\xi^2}\, d\xi. \tag{11.30}$$

Finalement

$$\int_{DE} = \int_{DE} \frac{e^{-x\sqrt{p}+pt}}{p}\, dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-x\sqrt{\varepsilon}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} + \varepsilon e^{i\varphi}}\, \varepsilon e^{i\varphi} i\, d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\sqrt{\varepsilon}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} + \varepsilon e^{i\varphi}}\, i\, d\varphi.$$

Et

$$\lim_{r\to 0}\int_{DE} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\sqrt{\varepsilon}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}+\varepsilon e^{i\varphi}}\, i\, d\varphi = 2\pi i. \tag{11.31}$$

En groupant (11.28), (11.29), (11.30) et (11.31), il vient

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}\frac{1}{p}\exp\left(-xp^{\frac{1}{2}}+tp\right)dp = 1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\, e^{-t\xi^2}\, d\xi.$$

En vertu de (11.27), la solution du problème est

$$u(x,\ t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\, e^{-t\xi^2}\, d\xi. \tag{11.32}$$

Mettons cette solution sous une autre forme. En dérivant (11.32) par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-t\xi^2}\cos x\xi\, d\xi. \tag{11.33}$$

Cette intégrale peut être calculée à l'aide de la théorie des résidus [19]. Soit la

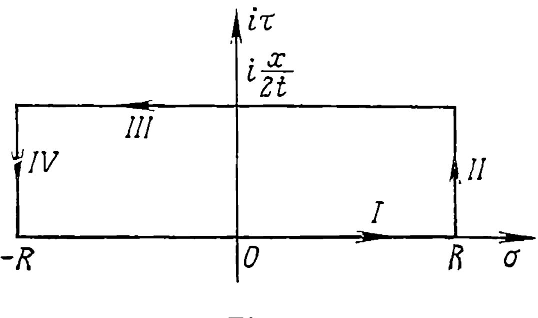


Fig. 49

fonction

$$f(z) = e^{-tz^2},$$

dont l'intégrale le long de l'axe réel se calcule à l'aide de l'intégrale de Poisson

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{11.34}$$

Sur la droite $\tau = h$, on a

$$e^{-t(\sigma+ih)^2} = e^{th^2}e^{-t\sigma^2}(\cos 2th\sigma - i\sin 2th\sigma).$$

La partie réelle de la dernière expression se distingue de la fonction à intégrer d'un facteur constant lorsque $h=\frac{x}{2t}$. Pour cette raison étendons l'intégration au contour de la figure 49. En vertu du théorème de Cauchy on aura

$$\int_{I} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0, \tag{11.35}$$

où

$$\int_{\mathrm{I}} = \int_{-R}^{R} e^{-t\xi^2}\,d\xi = \frac{2}{\sqrt{t}} \int_{0}^{\frac{R}{\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\,d\xi\,;$$

$$\int_{\mathrm{II}} = -e^{\frac{x^2}{4t}} \int_{-R}^{R} e^{-t\xi^2} e^{-ix\xi}\,d\xi.$$

Sur les segments II et IV, où $x = \pm R$, on a

$$| e^{-tz^2} | = e^{-t(R^2-\tau^2)} \leqslant e^{\frac{x^2}{4t}} e^{-tR^2},$$

donc, en supposant $t > 0$, on trouve $\int_{\mathrm{II,\ IV}} \to 0$ lorsque $R \to \infty$. Dans (11.35), en passant à la limite lorsque $R \to \infty$, et utilisant (11.34), on obtient

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} - e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2} e^{-ix\xi}\,d\xi = 0,$$

d'où, en comparant les parties réelles,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t\xi^2} \cos x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad t > 0. \tag{11.36}$$

En vertu de (11.36), l'égalité (11.33) devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{11.37}$$

Tenant compte de ce que $u\,(0,\ t) = 0$ et intégrant l'équation (11.37), on obtient

$$u\,(x,\ t) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{y^2}{4t}}\,dy.$$

Le changement de variables $\xi = \frac{y}{\sqrt{2t}}$ ramène la dernière égalité à la forme

$$u\,(x,\ t) = 1 - e^{-x\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\,d\xi = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{11.38}$$

D'où il suit visiblement que $u\,(0,\ t) = 0$, $u\,(x,\ 0) = 1$.

A remarquer que le calcul opérationnel permet de déduire très facilement l'égalité (11.38). En effet, la formule (7.11) donne

$$\sqrt{p}\,e^{-\lambda\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4t}},$$

or

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\xi\sqrt{p}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{-\lambda\sqrt{p}};$$

donc,

$$e^{-\lambda\sqrt{p}} = \int_{\lambda}^{\infty} \sqrt{p}\, e^{-\xi\sqrt{p}}\, d\xi \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi =$$

$$= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (11.39)$$

P r o b l è m e 2. Trouver la distribution de la température dans une tige semi-infinie $x \in]0, \infty[$ sachant que la température de l'extrémité de la tige varie selon la loi $u(0, t) = \varphi(t)$, et la température initiale est nulle.

La température $u(x, t)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x > 0, \qquad t > 0, \qquad (11.40)$$

et, de plus,

$$u = 0 \text{ pour } t = 0, \quad x > 0 \qquad (11.41)$$

$$u = \varphi(t) \text{ pour } x = 0, \quad t > 0. \qquad (11.42)$$

La forme opérationnelle du problème est

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a}\bar{u} = 0, \qquad (11.43)$$

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) \text{ pour } x = 0, \qquad (11.44)$$

d'où il vient, puisque $\bar{u}(x, p)$ est bornée lorsque $x \to \infty$

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p)\, e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}.$$

On a

$$e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}} \doteq \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \qquad (11.45)$$

donc

$$u(x, t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right) \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \operatorname{erfc}(\infty)\, \varphi(\tau) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right)\right\} \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}}\, d\tau. \qquad (11.46)$$

Le changement de variables

$$\xi=\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}$$

ramène (11.46) à la forme

$$u(x, t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{at}}}^{\infty}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4a\xi^2}\right)e^{-\xi^2}\,d\xi. \tag{11.47}$$

Il est aisé de voir que

$$u(x, 0)=0, \qquad u(0, t)=\varphi(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi=\varphi(t).$$

P r o b l è m e 3. Trouver la distribution de la température dans une tige de longueur l, dont la surface latérale n'est pas conductrice, sachant que la température est nulle aux extrémités, et la température initiale égale à une fonction $f(x)$.

Il faut intégrer l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x\in\,]0,\ l[, \qquad t\in\,]0,\ \infty[\tag{11.48}$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0)=f(x) \tag{11.49}$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t)=u(l, t)=0. \tag{11.50}$$

Dans le domaine transformé, le problème (11.48), (11.49) et (11.50) se ramène à la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p}{a}\bar{u}=-\frac{p}{a}f(x)$$

avec les conditions aux limites

$$\bar{u}(0, p)=\bar{u}(l, p)=0.$$

La solution est

$$\bar{u}(x, p)=-\sqrt{\frac{p}{a}}\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(x-\xi)\right]d\xi+$$
$$+\frac{\sqrt{\frac{p}{a}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)}\int_0^l f(\xi)\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-\xi)\right]d\xi.$$

La dernière égalité peut se mettre sous la forme

$$\bar{u}(x, p)=\sqrt{\frac{p}{a}}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)}\int_x^l f(\xi)\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-\xi)\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x)\right]}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}l\right)}\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\xi\right)d\xi.\right.$$

Posant $\sqrt{\frac{p}{a}}=q$, on obtient

$$\frac{q\,\mathrm{sh}\,(qx)\,\mathrm{sh}\,[q\,(l-\xi)]}{\mathrm{sh}\,(ql)}=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\times$$

$$\times\frac{q^2}{q^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}},\quad \xi\in\,]x,\ l[,$$

$$\frac{q\,\mathrm{sh}\,[q\,(l-x)]\,\mathrm{sh}\,(q\xi)}{\mathrm{sh}\,(ql)}=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\frac{q^2}{q^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}},\quad \xi\in\,]0,\ x[.$$

Compte tenu de la formule

$$\frac{q^2}{q^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}}=\frac{p}{p+\frac{k^2\pi^2a}{l^2}}\doteqdot e^{-\frac{k^2\pi^2at}{l^2}},$$

il vient

$$u(x,\ t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2\pi^2at}{l^2}}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\int_0^l f(\xi)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi. \quad (11.51)$$

P r o b l è m e 4. A l'extrémité d'une tige ($x=0$), la température est toujours nulle, à l'autre extrémité ($x=l$) elle varie comme $\varphi(t)$, i.e. $u(l,\ t)=\varphi(t)$. Trouver la température de la tige sachant que la surface latérale n'est pas conductrice et que la température initiale est nulle.

On demande de résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in\,]0,\ l[,\quad t\in\,]0,\ \infty[, \quad (11.52)$$

avec la condition initiale

$$u(x,\ 0)=0, \quad (11.53)$$

et les conditions aux limites

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=\varphi(t). \quad (11.54)$$

La forme opérationnelle de ce problème est

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p}{a}\bar{u}=0,$$

$$\bar{u}(0,\ p)=0,\qquad \bar{u}(l,\ p)=\bar{\varphi}(p),$$

d'où

$$\bar{u}(x,\ p)=\bar{\varphi}(p)\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)}$$

et

$$u(x,\ t)=\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(\tau)\,\Psi(x,\ t-\tau)\,d\tau,$$

où

$$\Psi(x,\ t)=\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)}.$$

Pour calculer l'opérateur $\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)}$ il faut le décomposer en fractions élémentaires. La fonction méromorphe $\frac{\operatorname{sh} qx}{\operatorname{sh} ql}$ où $q=\sqrt{\frac{p}{a}}$ possèdent des pôles simples aux points $q_k=\pm i\,\frac{k\pi}{l}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Son développement en fractions élémentaires est

$$\Psi(x,\ t)=\frac{\operatorname{sh} qx}{\operatorname{sh} ql}=\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\frac{q^2}{q^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}}=$$

$$=\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\frac{p}{p+\frac{k^2\pi^2 a}{l^2}} \qquad (11.55)$$

et

$$\Psi(x,\ t)=\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,e^{-\frac{k^2\pi^2 at}{e^2}}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

donc,

$$u(x,\ t)=\frac{x}{l}\,\varphi(t)+\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)e^{-\frac{k^2\pi^2 at}{l^2}}\int_0^t \varphi(\tau)\,e^{\frac{k^2\pi^2 a\tau}{l^2}}\,d\tau. \qquad (11.56)$$

On sait que

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots, \qquad x\in\,]-\pi,\ \pi[$$

donc

$$\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)=0, \qquad x\in\,]-l,\ l[$$

En développant l'opérateur $\frac{d}{dt}$ dans (11.56), pour $x \neq l$, on obtient, compte tenu de la relation précédente,

$$u(x, t) = -\frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 at}{l^2}} \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{k^2\pi^2 a\tau}{l^2}} d\tau. \tag{11.57}$$

Problème 5. Calculer la température d'un fil homogène fin, de section constante, chauffé par un courant électrique d'intensité constante. La température est nulle aux extrémités, celle du milieu ambiant est constante.

Mettons le problème en équation. On sait que 1) la chaleur rayonnée est proportionnelle à la surface et à la différence de températures; 2) la quantité de chaleur dégagée par un fil traversé par un courant d'intensité i est proportionnelle à i^2 et à la longueur de ce fil. Donc, il faut résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + a, \quad x \in]0, l[, \quad t > 0, \tag{11.58}$$

où k, a et b sont des constantes, avec les conditions aux limites

$$u(0;\ t) = u(l,\ t) = 0, \quad t > 0, \tag{11.59}$$

et la condition initiale

$$u(x,\ 0) = 0, \quad x \in]0,\ l[. \tag{11.60}$$

L'équation transformée s'écrit

$$k\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - (b+p)\bar{u} + a = 0$$

avec la condition

$$\bar{u}(0,\ p) = \bar{u}(l,\ p) = 0.$$

Si

$$q = \sqrt{\frac{p+b}{k}},$$

la solution de l'équation transformée est

$$\bar{u}(x,\ p) = \frac{a}{p+b}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\operatorname{ch} q\frac{l}{2}}\right].$$

Cet opérateur vaut

$$u(x,\ t) = \frac{a}{b}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{2} - x\right)\sqrt{\frac{b}{k}}}{\operatorname{ch}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{b}{k}}}\right\} -$$

$$-\frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp\left\{-\left[b + k\frac{\pi^2}{l^2}(2n+1)^2\right]t\right\}\sin\frac{\pi x}{l}(2n+1)}{(2n+1)\left[b + k\frac{\pi^2}{l^2}(2n+1)^2\right]}. \tag{11.61}$$

Problème 6. On demande la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), \quad x \in]0, l[, \ t > 0, \tag{11.62}$$

qui vérifie les conditions initiales et aux limites nulles

$$u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{11.63}$$

Le problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a}\bar{u} = -\bar{f}(p)$$

avec les conditions aux limites

$$\bar{u}(0, p) = \bar{u}(l, p) = 0.$$

On a

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{f}(p)}{p} \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right) - \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right) - \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x)\right]}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)}.$$

En vertu de (11.55), il vient

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)} = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} e^{-\frac{k^2\pi^2at}{l^2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Remplaçons x par $l-x$:

$$\frac{\operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x)\right]}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)} = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} e^{-\frac{k^2\pi^2at}{l^2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right),$$

donc,

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right) - \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,x\right) - \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{p}{a}}(l-x)\right]}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\,l\right)} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{2m+1}{l}\pi x\right]}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2at}{l^2}},$$

et

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2m+1)\frac{\pi x}{l}\right]}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2at}{l^2}} \times$$

$$\times \int_0^t e^{\frac{(2m+1)^2\pi^2a\tau}{l^2}} f(\tau)\,d\tau. \tag{11.64}$$

P r o b l è m e 7. Sur un cylindre infini de rayon a, la température est maintenant constante ($u_0 = 1$). On demande la température en un point quelconque du milieu extérieur à l'instant t, sachant qu'à l'instant initial la température de ce milieu est nulle.

Le problème se ramène à la résolution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{11.65}$$

avec la condition initiale

$$u=0 \text{ pour } t=0 \text{ et } r\in]a,\ \infty[, \tag{11.66}$$

et les conditions aux limites

$$u=1 \text{ pour } r=a, \quad t>0 \text{ et } \lim u(r,\ t)=0, \quad t>0. \tag{11.67}$$

L équation transformée s'écrit

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr}-\frac{p}{k}\bar{u}=0.$$

La solution doit satisfaire les conditions

$$\bar{u}=1 \quad \text{pour} \quad r=a \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty}\bar{u}(r,\ p)=0,$$

Cette équation admet deux solutions linéairement indépendantes $K_0(\nu r)$ et $I_0(\nu r)$, où

$$\nu=\sqrt{\frac{p}{k}}. \tag{11.68}$$

La solution générale est donc $c_1K_0(\nu r)+c_2I_0(\nu r)$. Cherchons la solution qui vérifie les conditions aux limites, i.e.

$$\bar{u}(r,\ p)=\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)};$$

on a choisi la branche de la racine (11.68) pour laquelle $\lim\limits_{r\to+\infty}K_0(\nu r)=0$, i.e. $\sqrt{p}>0$ si p est un réel positif et $\arg p=0$. Si donc l'opérateur $\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}$, où ν est le même que dans (11.68), vérifie les hypothèses du théorème 1, § 10, la solution du problème sera la fonction

$$u(r,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}\frac{e^{pt}}{p}\,dp, \quad \gamma>0. \tag{11.69}$$

La fonction $\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}$ est analytique dans le plan complexe muni d'une coupure le long de la partie négative de l'axe réel. Pour les grandes valeurs de $|p|$, on a la représentation asymptotique ([2], chapitre VII)

$$\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}\sim\sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{\nu(r-a)}.$$

où ν est le même que dans (11.68). L'intégrale (11.69) est uniformément convergente sur les intervalles $[r-a,\ 0[$ et $[0,\ T]$, de variation de ε et t donc la fonction $u(r,\ t)$ est continue sur ces intervalles. Mettons l'expression (11.69) sous une forme commode aux calculs. A cet effet, considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}e^{pt}\frac{dp}{p}, \tag{11.70}$$

où L est le contour de la figure 48. La fonction à intégrer remplissant les conditions du lemme de Jordan, on déduit de (11.70), lorsque $R\to\infty$, que

$$u(r,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}\frac{e^{pt}}{p}\,dp,$$

où Γ est le contour de la fig. 50. En étendant le contour Γ aux bords de la coupure et tenant compte de la singularité du point $p = 0$, on obtient

$$u(r, t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(a\nu) Y_0(r\nu) - J_0(r\nu) Y_0(a\nu)}{J_0^2(a\nu) + Y_0^2(a\nu)} \frac{e^{-\rho t}}{\rho} d\rho, \quad \nu = \sqrt{\frac{\rho}{k}}.$$

Pour déduire cette expression, on s'est servi des formules

$$K_0(ze^{i\frac{\pi}{2}}) = -\pi i [J_0(z) - iY_0(z)],$$

$$K_0(ze^{-i\frac{\pi}{2}}) = \pi i [J_0(z) + iY_0(z)].$$

La fonction $u(r, t)$ peut visiblement être mise sous la forme

$$u(r, t) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-tk\alpha^2} \frac{J_0(r\alpha) Y_0(a\alpha) - J_0(a\alpha) Y_0(r\alpha)}{J_0^2(a\alpha) + Y_0^2(a\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha}. \qquad (11.71)$$

La continuité de $u(r, t)$ découle aussitôt de son expression lorsque $r \to a$. En

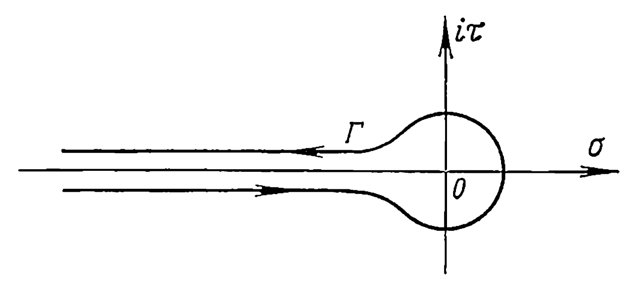


Fig. 50

effet, pour $t > 0$, on a

$$\lim_{r \to a} u(r, t) = 1.$$

P r o b l è m e 8. Trouver la distribution d'un gaz dans l'espace sachant qu'à l'instant initial la température est constante ($u_0 = 1$) à l'intérieur et partout nulle à l'extérieur d'un cylindre infini de rayon $r = a$.

La fonction cherchée $u(r, t)$, où r est la distance à l'axe du cylindre et t le temps, est solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \qquad (11.72)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0 & \text{si} \quad r > a \end{cases} \qquad (11.73)$$

et les conditions aux limites lorsque $t > 0$

$$\lim_{r \to 0} u(r, t) = \text{const}, \qquad \lim_{r \to \infty} u(r, t) = 0. \qquad (11.74)$$

Posons $u(0, r) = \varphi(r)$. L'équation transformée s'écrit

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{p}{k} \bar{u} = -\frac{p}{k} \varphi(r).$$

La solution cherchée est unique, puisqu'elle est bornée aux extrémités de la section $]0, \infty[$. La fonction de Green de l'équation homogène associée est

$$G(r, \rho) = \begin{cases} -I_0(\nu r) K_0(\nu\rho) & \text{pour} \quad r \in [0, \rho], \\ -I_0(\nu\rho) K_0(\nu r) & \text{pour} \quad \rho \leqslant r, \end{cases}$$

où $\nu^2 = \frac{p}{k}$. La solution cherchée s'exprime à l'aide de la fonction de Green comme suit

$$\bar{u}(r, p) = \frac{p}{k} K_0(\nu r) \int_0^r I_0(\nu\rho) \varphi(\rho) \rho \, d\rho + \frac{p}{k} I_0(\nu r) \int_r^\infty K_0(\nu\rho) \varphi(\rho) \rho \, d\rho,$$

où ν est le même que dans (11.68). Remplaçons $\varphi(r)$ par son expression. Tous calculs faits à l'aide de formules de récurrence connues pour les fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ et compte tenu de l'identité

$$K_0(z) I_1(z) - K_1(z) I_0(z) = \frac{1}{z}$$

il vient

$$\bar{u}(r, p) = 1 - \frac{ap}{k\nu} I_0(r\nu) K_1(a\nu), \quad \text{pour} \quad r \in [0, a[,$$

$$\bar{u}(r, p) = \frac{ap}{k\nu} I_1(a\nu) K_0(r, \nu), \quad \text{pour} \quad r > a.$$

Choisissons la branche de la racine $\sqrt{\frac{p}{k}}$ pour laquelle $\sqrt{\frac{p}{k}} > 0$ si $\arg p = 0$. Munissons le plan de la variable complexe d'une coupure le long de la partie négative de l'axe réel.

En appliquant les formules asymptotiques pour $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ il vient pour les grands $|p|$

$$I_0(r\nu) K_1(a\nu) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu r} \frac{\pi}{2a\nu}} \{e^{-(a-1)\nu} \pm ie^{-(a+1)\nu}\},$$

$$I_1(a\nu) K_0(r\nu) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu a} \frac{\pi}{2r\nu}} \{e^{-(1-a)\nu} \mp ie^{-(a+1)\nu}\},$$

où les signes supérieurs correspondent au cas $-\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{3\pi}{2}$ et les inférieurs à $-\frac{3\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}$ et $\nu = \sqrt{\frac{p}{k}}$, $\operatorname{Re} \nu \geqslant 0$. Il est clair que la fonction $\frac{\bar{u}(r, p)}{p}$ remplit les conditions du lemme de Jordan, et dans l'intégrale

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{u(r, p)}{p} e^{pt} \, dp$$

on peut remplacer le contour rectiligne par un contour du type de Hankel (cf. fig. 48). Etendant ce contour aux bords de la coupure et compte tenu de

$$I_0(e^{\pm \frac{\pi i}{2}} z) = J_0(z) \quad \text{et} \quad K_1(e^{\pm \frac{\pi i}{2}} z) = -\frac{\pi}{2} [J_1(z) \mp iY_1(z)],$$

on déduit que pour tous les r

$$u(r,\ t)=\frac{a}{2k}\int_0^\infty J_0(r\nu)\,J_1(a\nu)\,\frac{e^{-\rho t}}{\nu}\,d\rho,$$

où $\nu=\sqrt{\frac{\rho}{k}}$ ou encore

$$u(r,\ t)=a\int_0^\infty J_0(r\xi)\,J_1(a\xi)\,e^{-ik\xi^2}\,d\xi\,; \tag{11.75}$$

d'où il suit que lorsque $t\to\infty$, les fonctions $u(r,\ t)$, $u_r(r,\ t)$ et $u_{rr}(r,\ t)$ sont uniformément bornées en r. Lorsque $t>0$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\ t)=0,$$

puisque $|J_0(r\xi)|\leqslant 1$ et $\lim\limits_{r\to\infty} J_0(r\xi)=0$.

On remarquera que

$$\lim_{r\to 0} u(r,\ t)=a\int_0^\infty J_1(a\xi)\,e^{-kt\xi^2}\,d\xi.$$

Le calcul de la dernière intégrale est aisé. En effet, si

$$\varphi(t)=a\int_0^\infty J_1(a\xi)\,e^{-tk\xi^2}\,d\xi,$$

on montre sans peine que

$$\varphi'(t)=\frac{a^2}{4kt^2}\,[\varphi(t)-1],$$

d'où

$$\varphi(t)=1-e^{-\frac{a^2}{4kt}},$$

et

$$u(0,\ t)=1-e^{-\frac{a^2}{4kt}}.$$

P r o b l è m e 9. Un fil métallique AB de longueur $2l$, de diamètre $2a$ (fig. 51), placé dans un milieu homogène infini est traversé par un courant d'intensité I. On demande de trouver la distribution de la température le long de ce fil à chaque instant t en tenant compte de la chaleur rayonnée dans le milieu ambiant. La température du fil et du milieu ambiant est nulle à l'instant initial ($t=0$). Les extrémités du fil sont maintenues à une température constante nulle.

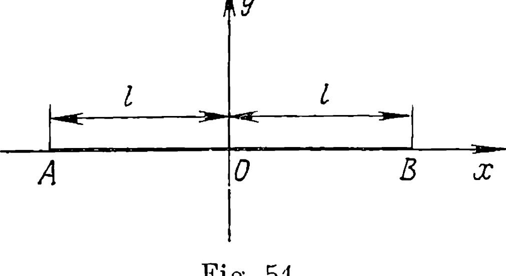


Fig. 51

On résoudra ce problème sous les hypothèses suivantes:

1) la température du fil dépend uniquement du point considéré et du temps: $T_1=T_1(x,\ t)$, $x\in[-l,\ l]$, i.e. nous supposons que la température du fil est constante en tous les points de la section perpendiculaire à l'axe du fil;

2) le milieu ambiant est anisotrope, i.e. la chaleur se diffuse uniquement dans des plans perpendiculaires à l'axe du fil. Donc, la température du milieu

ambiant T_2 dépend de x, r et t:

$$T_2 = T_2(x, r, t) \quad x \in [-l, l], \quad r \geqslant a.$$

Il s'agit donc de résoudre les équations [5]:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{2\pi a \lambda_2}{\lambda_1 f}\left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=a} + \frac{0{,}24 I^2 R}{\lambda_1 f} = \frac{\gamma_1 c_1}{\lambda_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} \tag{11.76}$$

et

$$\frac{c_2\gamma_2}{\lambda_2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r}, \tag{11.77}$$

où λ_1, c_1 et γ_1 sont respectivement le coefficient de conductibilité thermique intérieur, la capacité thermique spécifique et la densité du fil, λ_2, c_2, γ_2 les mêmes coefficients pour le milieu ambiant, f l'aire de la section du fil, R la résistance d'une unité de longueur du fil.

Posons $k = \frac{\lambda_1}{\gamma_1 c_1}$ et $k_1 = \frac{\lambda_2}{\gamma_2 c_2}$ et au lieu de T_1 et T_2 introduisons les fonctions $u(x, t)$ et $u_1(x, r, t)$:

$$T_1 = \frac{0{,}24 I^2 R k}{\lambda_1 f} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{0{,}24 I^2 R k}{\lambda_1 f} u_1,$$

le système s'écrit alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda a\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} + 1, \tag{11.78}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right), \tag{11.79}$$

où

$$\lambda = \frac{2\pi\lambda_2 k}{\lambda_1 f}.$$

Les solutions $u(x, t)$ et $u_1(x, r, t)$ doivent réaliser les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [-l, l] \tag{11.80}$$

$$u_1(x, r, 0) = 0, \quad r \geqslant a, \tag{11.81}$$

et les conditions aux limites

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \tag{11.82}$$

$$u_1(x, a, t) = u(x, t), \tag{11.83}$$

$$\lim_{r\to\infty} u_1(x, r, t) = 0. \tag{11.84}$$

Ecrivons les équations pour $u_1(x, r, t)$ et $u(x, t)$ sous la forme opérationnelle:

$$\frac{d^2\bar{u}_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{u}_1}{dr} - \frac{p}{k_1}u_1 = 0, \quad r > a, \tag{11.85}$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{k}\bar{u} + \frac{\lambda a}{k}\left(\frac{d\bar{u}_1}{\partial r}\right)_{r=a} + \frac{1}{k} = 0. \tag{11.86}$$

La solution doit vérifier les conditions aux limites

$$\bar{u}_1|_{r=a} = \bar{u} \text{ et } \lim_{r\to\infty} \bar{u}_1 = 0, \tag{11.87}$$

$$\bar{u}(l, p) = \bar{u}(-l, p) = 0. \tag{11.88}$$

De (11.85) et (11.87) il vient

$$\bar{u}_1(x, r, p) = \bar{u}(x, p) \frac{H_0^{(1)}\left(ir\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}, \tag{11.89}$$

donc,

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial r}\right|_{r=a} = -i\sqrt{\frac{p}{k_1}} \frac{H_1^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)} \bar{u}(x, p);$$

et (11.86) s'écrit

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \left[\frac{p}{k} + \frac{ia\lambda}{k}\sqrt{\frac{p}{k_1}} \frac{H_1^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}\right] \bar{u}(x, p) = -\frac{1}{k}. \tag{11.90}$$

Posons

$$h(p) = p + ia\lambda\sqrt{\frac{p}{k_1}} \frac{H_1^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}, \tag{11.91}$$

(11.90) s'écrit alors

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{h(p)}{k}\bar{u} = -\frac{1}{k}.$$

La solution de cette équation avec la condition (11.88) sera

$$\bar{u}(x, p) = \frac{1}{h(p)}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{\frac{h(p)}{k}}}{\operatorname{ch} l\sqrt{\frac{h(p)}{k}}}\right].$$

Pour calculer

$$\bar{u}(x, p) = u(x, t)$$

on se servira de la transformation d'Efros (cf. § 7, pt. 3). Soit

$$1 - \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{\frac{p}{k}}}{\operatorname{ch} l\sqrt{\frac{p}{k}}} = F(x, p);$$

de toute évidence.

$$\bar{u}(x, p) = \frac{F[x, h(p)]}{h(p)} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \Psi(\xi, t)\,\varphi(x, \xi)\,d\xi, \tag{11.92}$$

où

$$\varphi(x, t) = F(x, p) \quad \text{et} \quad \Psi(\xi, t) = \frac{1}{p} e^{-\xi h(p)}.$$

Si $q = \sqrt{\frac{p}{k}}$ alors

$$\varphi(x, t) = \left(1 - \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\frac{p}{k}}}{\operatorname{ch} l \sqrt{\frac{p}{k}}}\right) = 1 - \frac{e^{xq} + e^{-xq}}{e^{lq} + e^{-lq}} =$$

$$= 1 - \frac{e^{-(l-x)q} + e^{-(l+x)q}}{1 + e^{-2lq}} = 1 - (e^{-(l-x)q} + e^{-(l+x)q}) +$$

$$+ (e^{-(3l-x)q} + e^{-(3l+x)q}) - \ldots = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{l-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{l+x}{2\sqrt{kt}}\right) -$$

$$- \operatorname{erfc}\left(\frac{3l-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3l+x}{2\sqrt{kt}}\right) - \ldots \qquad (11.93)$$

où

$$\operatorname{erfc} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du = e^{-x\sqrt{p}}.$$

La série (11.93) est facile à manipuler pour t petit. Pour les grands t on a intérêt à se servir du développement (cf. (7.14))

$$\varphi(x, t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp\left[-k\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 t}{l^2}\right] \times$$

$$\times \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}. \qquad (11.94)$$

Montrons que les conditions du théorème 5, § 7, sont réalisées. De (11.94) il suit

$$\int_0^\infty |\varphi(x, t)| \, dt \leqslant \frac{l^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^3} = \text{const.}$$

Il est évident que l'on peut prendre γ_0 nul (cf. § 7, théorème 5). Reste à prouver que

$$\operatorname{Re}[h(p)] \geqslant 0, \qquad (11.95)$$

si $\operatorname{Re} p > 0$. Considérons à cet effet l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{z})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{z})} \frac{1}{i\sqrt{z}} \frac{dz}{z-p} = \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{p})} \frac{1}{i\sqrt{p}}, \qquad (11.96)$$

où L est le contour fermé de la fig. 52, et le point p se trouve à l'intérieur du contour. Le développement asymptotique (cf. [2])

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right), \quad \arg z \in]-\pi, \pi[$$

entraîne que pour les $|z|$ suffisamment grands et $\arg z \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{z})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{z})} \approx -i, \tag{11.97}$$

donc, dans (11.96), on peut passer à la limite lorsque $R \to \infty$ et l'on aura

$$\frac{1}{i\sqrt{p}} \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{p})} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{z})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{z})} \frac{1}{i\sqrt{z}} \frac{dz}{z-p},$$

où l'intégration est étendue à un contour du type C (fig. 53). En étendant ce con-

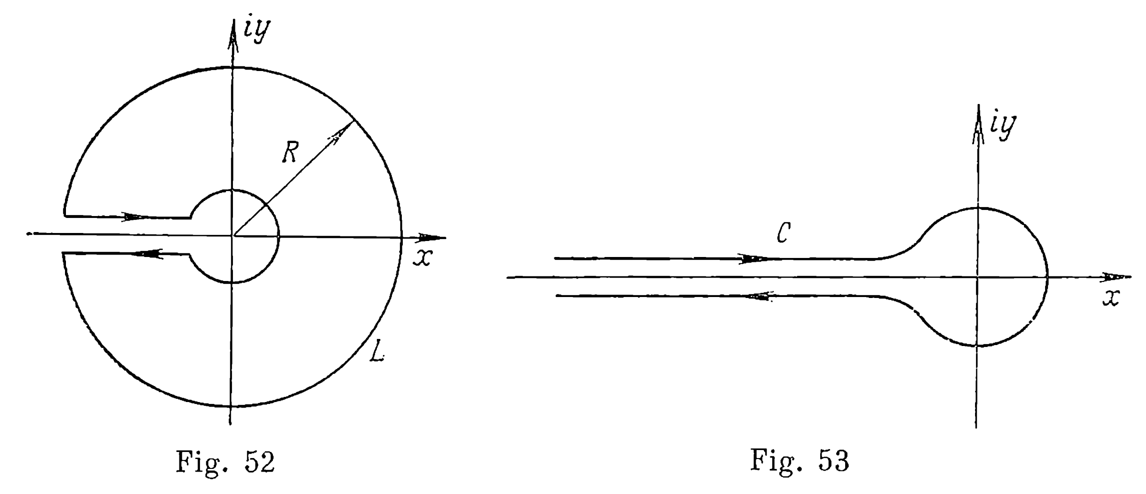


Fig. 52 Fig. 53

tour aux extrémités de la coupure, on obtient

$$\frac{1}{i\sqrt{p}} \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{p})} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{\rho})}{H_0^{(1)}(\sqrt{\rho})} + \frac{H_1^{(1)}(-\sqrt{\rho})}{H_0^{(1)}(-\sqrt{\rho})} \right\} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{\rho+p} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{\rho})}{H_0^{(1)}(\sqrt{\rho})} - \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{\rho})}{H_0^{(2)}(\sqrt{\rho})} \right\} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{\rho+p}.$$

Pour déduire cette expression, on s'est servi de la formule (cf. [26], page 983)

$$H_\nu^{(1)}(-z) = -e^{-\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z).$$

En remplaçant $H_\nu^{(1)}$ et $H_\nu^{(2)}$ par leurs expressions à l'aide des fonctions de Bessel

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z),$$

on obtient

$$\frac{1}{i\sqrt{p}} \frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{p})} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(\sqrt{\rho})\, Y_1(\sqrt{\rho}) - J_1(\sqrt{\rho})\, Y_0(\sqrt{\rho})}{J_0^2(\sqrt{\rho}) + Y_0^2(\sqrt{\rho})} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{p+\rho};$$

or

$$J_0(z)\, Y_1(z) - J_1(z)\, Y_0(z) = -\frac{2}{\pi z},$$

donc

$$\frac{1}{i\sqrt{p}}\,\frac{H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{H_0^{(1)}(i\sqrt{p})}=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{J_0^2(\sqrt{\rho})+Y_0^2(\sqrt{\rho})}\,\frac{d\rho}{\rho\,(p+\rho)}. \qquad (11.98)$$

Soit

$$S(p)=ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\,\frac{H_1^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}.$$

De toute évidence, $h(p)=p+\lambda S(p)$ (cf. 11.91)). Pour démontrer (11.95), il suffit donc de prouver que $\operatorname{Re}[S(p)]\geqslant 0$ lorsque $\operatorname{Re} p\geqslant 0$. Cette propriété découle immédiatement de (11.98), puisque

$$S\left(\frac{pk_1}{a^2}\right)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{J_0^2(\sqrt{\rho})+Y_0^2(\sqrt{\rho})}\,\frac{p}{p+\rho}\,\frac{d\rho}{\rho} \qquad (11.99)$$

et $\operatorname{Re}\left(\frac{p}{p+\rho}\right)>0$ pour $\operatorname{Re} p>0$ et $\rho\geqslant 0$. On a visiblement prouvé plus que n'exigeait (11.95), notamment que $\operatorname{Re}[h(p)]>\varepsilon$ pour $\operatorname{Re} p>\varepsilon$. De là découle la convergence absolue et uniforme de l'intégrale (cf. (11.92)) :

$$Q(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{pt-\xi h(p)}}{p}\,dp=\frac{d}{dt}\Psi(\xi,t),\qquad \gamma>0, \qquad (11.100)$$

donc, dans (11.92), l'opérateur $\frac{d}{dt}$ peut être introduit sous le signe d'intégration. De (11.92) il suit alors

$$u(x,t)=\int_0^\infty Q(\xi,t)\,\varphi(x,\xi)\,d\xi. \qquad (11.101)$$

Calculons l'intégrale (11.100). De toute évidence,

$$Q(\xi,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{p(t-\xi)-\lambda\xi S(p)}\,\frac{dp}{p}. \qquad (11.102)$$

Si $t-\xi<0$, on a $Q(\xi,t)=0$, puisque $e^{-\lambda\xi S(p)+p(t-\xi)}$ tendra vers zéro lorsque $|p|\to\infty$ et $|\arg p|<\frac{\pi}{2}$ et, de plus, $|e^{-\lambda\xi S(p)+p(t-\xi)}|\leqslant 1$ lorsque $|\arg p|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Supposons maintenant que $t-\xi>0$. A l'intérieur du contour (cf. fig. 54), la fonction $\frac{1}{p}e^{-2\xi S(p)+(t-\xi)p}$ ne présente pas de singularités. L'intégrale étendue aux arcs BC et DA tend vers zéro lorsque $R\to\infty$. Ce qu'on établit sans peine à l'aide de la formule (11.97). Donc, l'intégrale (11.100) vau-

dra

$$J=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{-\lambda\xi S(p)+p(t-\xi)}\frac{dp}{p},$$

où C est le contour de la fig. 53. En étendant ce contour aux bords de la coupure faite le long de la partie négative de l'axe réel et en tenant compte du fait que l'intégrale prise sur le petit cercle autour de l'origine, est égale à l'unité, on obtient

$$J=1-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{\infty}^{0} e^{-\lambda\xi S(\rho e^{i\pi})-\rho(t-\xi)}\frac{d\rho}{\rho}+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\xi S(\rho e^{i\pi})-\rho(t-\xi)}\frac{d\rho}{\rho}\right\};$$

On remarquera que

$$S(\rho e^{i\pi})=-a\sqrt{\frac{p}{k_1}}\,\frac{H_1^{(1)}\left(-a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(-a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)}=a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\,\frac{H_1^{(2)}\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k}}\right)}{H_0^{(2)}\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k}}\right)}.$$

$$S(\rho e^{-i\pi})=a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\,\frac{H_1^{(1)}\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)}.$$

Posons pour les x réels

$$\frac{xH_1^{(1)}(x)}{H_0^{(1)}(x)}=u(x)+iv(x)\ ^{*)}. \qquad (11.103)$$

En vertu de

$$H_1^{(1)}(x)=J_1(x)+iY_1(x),$$
$$H_0^{(1)}(x)=J_2(x)+iY_0(x),$$

il vient

$$u(x)+iv(x)=\frac{x\,[J_1(x)+iY_1(x)]\,[J_0(x)-iY_0(x)]}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)}=$$
$$=\frac{x\,[J_1(x)\,J_0(x)+Y_1(x)\,Y_0(x)]+ix\,[J_0(x)\,Y_1(x)-Y_0(x)\,J_1(x)]}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)};$$

or

$$J_0(x)\,Y_1(x)-J_1(x)\,Y_0(x)=-\frac{2}{\pi x},$$

donc

$$u(x)=\frac{x\,[J_0(x)\,J_1(x)+Y_0(x)\,Y_1(x)]}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)},$$

$$v(x)=-\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{J_0^2(x)+Y_0^2(x)}.$$

Si l'on se sert des formules asymptotiques des fonctions $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ et $Y_1(x)$ lorsque $x\to\infty$

---

*) Les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ ont été calculées dans [7].

(cf. § 12), on peut prouver que

$$u(x) \sim \frac{1}{2} \text{ lorsque } x \to \infty$$

$$v(x) \sim -x \text{ lorsque } x \to \infty .$$

Donc on aura

$$S(\rho e^{-i\pi}) = u\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right) + iv\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right),$$

$$S(\rho e^{i\pi}) = u\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right) - iv\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right).$$

L'expression définitive de l'intégrale (11.100) lorsque $t - \xi > 0$ sera

$$Q(\xi, t) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi u\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right) - \rho(t-\xi)} \sin\left[\lambda\xi v\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)\right]\frac{d\rho}{\rho}. \tag{11.104}$$

En vertu de (11.101) la solution peut être mise sous la forme intégrale

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, \xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^t \varphi(x, \xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-\lambda\xi u\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right) - \rho(t-\xi)} \sin\left[\lambda\xi v\left(a\sqrt{\frac{\rho}{k_1}}\right)\right]\frac{d\rho}{\rho}. \tag{11.105}$$

où $\varphi(x, t)$ est donnée dans (11.93) ou (11.94).

Le calcul de l'intégrale (11.105) appelle quelques remarques. Si l'on se sert de la deuxième expression de la fonction $\varphi(x, t)$ (cf. (11.94)), on peut intégrer sur ξ et des calculs peu compliqués donnent

$$u(x, t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \times$$

$$\times \frac{1 - \exp\left\{-\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{k\pi^2}{l^2} t\right\}}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{k\pi^2}{l^2}} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{-t(\lambda u(y)+\omega)}\left\{\left[\frac{k_1 y^2}{a^2} - \lambda u(y) - \omega\right]\sin[t\lambda v(y)] - \lambda v(y)\cos[t\lambda v(y)]\right\} + \alpha(y)}{\left[\frac{k_1}{a^2}y^2 - \lambda u(y) - \omega\right]^2 + [\lambda v(y)]^2}\frac{dy}{y},$$

$$\omega = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{k\pi^2}{l^2}, \quad \alpha(y) = e^{-\frac{tk_1 y^2}{a^2}} \lambda v(y). \tag{11.106}$$

On peut utiliser cette formule lorsque l est petit devant $\sqrt{t}$, i.e. $t \gg l^2$; on peut alors admettre que $\exp\left[-t\left(n - \frac{2}{2}\right)^2 \frac{k\pi^2}{l^2}\right] \approx 0$ et compte tenu

de ce que

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{k\pi^2}{l^2}}=\frac{l^2-x^2}{2k},$$

lorsque $|x|\leqslant l$, obtenir

$$u(x,t)=\frac{l^2-x^2}{2k}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\lambda v(y)\exp\left[-t\frac{k_1^2}{a^2}y^2\right]}{\left[\frac{k_1}{a^2}y^2-\lambda v(y)-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{k\pi^2}{l^2}\right]^2+[\lambda v(y)]^2}\,\frac{dy}{y}. \tag{11.107}$$

Nous ne nous étendrons pas plus sur la formule obtenue, car dans la pratique, ce sont ou bien l'état stationnaire qui découle aisément de la dernière égalité, ou bien le régime non établi, qui présentent le plus d'intérêt. Etudions le régime non établi.

On supposera donc que t est petit. Si $\sqrt{t}\ll l$ et $|x|<\theta l$, $\theta\in\,]0,\,1[$, alors

$$\frac{l\pm x}{2\sqrt{kt}}\gg 1,\quad \frac{3l\pm x}{2\sqrt{kt}}\gg 1,\ \text{etc.}$$

Donc, dans (11.93) ($\xi\leqslant t$), on peut considérer que tous les termes, sauf le premier, sont nuls, d'où

$$\varphi(x,t)\approx 1.$$

Dans des calculs plus fins, on prendra

$$\varphi(x,t)\approx 1-\operatorname{erfc}\left(\frac{l-x}{2\sqrt{kt}}\right)=\operatorname{erf}\left(\frac{l-x}{2\sqrt{kt}}\right).$$

Ainsi, lorsque $t\ll l^2$ on peut toujours indiquer un voisinage du zéro $|x|<\theta l$, $\theta\in\,]0,\,1[$ dans lequel la valeur de $u(x,t)$ dépendra uniquement du temps dans les limites de la précision donnée. En posant $\varphi(x,\xi)=1$ dans (11.105) et en intégrant sur ξ, on obtient

$$u(x,t)\approx u(t)=t+\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda tu(y)}\left\{\left[\frac{k_1}{a^2}y^2-\lambda u(y)\right]\sin[\lambda tv(y)]-\lambda v(y)\cos[\lambda tv(y)]\right\}+\alpha(y)}{\left[\frac{k_1}{a^2}y^2-\lambda u(y)\right]^2+[\lambda v(y)^2]}\,\frac{dy}{y}. \tag{11.108}$$

Il est aisé de calculer $u(x,t)$ à l'aide des tables de valeurs de $u(x)$ et $v(x)$. Une remarque à ce propos. Les limites d'intégration doivent être fractionnées comme suit: $]0,\alpha[$, $]\alpha,\beta[$ et $]\beta,\infty[$. Si α est pris tel que dans l'intervalle $]0,\alpha[$ la quantité $\frac{k_1y^2}{a^2}$ soit négligeable alors, un calcul aisé montre que la fonction figurant sous le signe somme dans (11.108) sera égale à

$$\frac{\lambda t^2}{2}\,\frac{v(y)}{y}.$$

Donc, l'intégrale envisagé vaut sur cet intervalle

$$\int_0^\alpha = \frac{\lambda t^2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{v(y)}{y}\, dy .$$

Sur l'intervalle $]\beta, \infty[$ on se servira de l'expression asymptotique des fonctions $u(x)$ et $v(x)$, soit: $u(x) \approx \frac{1}{2}$ et $v(x) \approx -x$.

Indiquons pour conclure comment calculer la température du milieu ambiant. De (11.89) il vient

$$u_1(x, r, t) = \frac{H_0^{(1)}\left(ir\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H_0^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}\, u(x, t).$$

Soit

$$\frac{H_0^{(1)}\left(ir\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)}{H^{(1)}\left(ia\sqrt{\frac{p}{k_1}}\right)} = \Phi(r, t), \tag{11.109}$$

donc

$$u_1(x, r, t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \Phi(r, t-\xi)\, u(x, \xi)\, d\xi. \tag{11.110}$$

Trouvons la valeur de l'opérateur (11.109). On sait que $H_0^{(1)}(iz) = \frac{\pi i}{2} K_0(t)$. Posons $\sqrt{\frac{p}{k_1}} = \nu$. Il vient

$$\Phi(r, t) = \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)} .$$

La fonction $\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}$, $\nu = \sqrt{\frac{p}{k_1}}$ est analytique dans le plan complexe muni d'une coupure le long de la partie négative de l'axe réel. Pour les grandes valeurs de r on a le développement asymptotique (cf. [34])

$$\frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)} = \sqrt{\frac{a}{r}}\, e^{-\nu(r-a)}, \quad \arg p \in [-\pi, \pi].$$

D'où il suit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}\, e^{pt}\, \frac{dp}{p} = 0$$

(L est le contour de la fig. 54). La fonction à intégrer remplit les conditions du lemme de Jordan, donc lorsque $R \to \infty$

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{K_0(\nu r)}{K_0(\nu a)}\, \frac{e^p}{p}\, dp,$$

où C est le contour de la fig. 53. En étendant le contour C aux bords de la coupure et en tenant compte de la singularité du point $p = 0$, on obtient

$$\Phi(r, t) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(a\nu) Y_0(r\nu) - J_0(r\nu) Y_0(a\nu)}{J_0^2(a\nu) + Y_0^2(a\nu)} \frac{e^{-\rho t}}{\rho} d\rho, \qquad (11.111)$$

où $\nu = \sqrt{\frac{\rho}{k_1}}$. Pour arriver à ce résultat nous nous sommes servi des égalités (cf. [34])

$$K_0(ze^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi i}{2} \{J_0(z) - iY_0(z)\},$$

$$K_0(ze^{-i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi i}{2} \{J_0(z) + iY_0(z)\}.$$

Sachant $\Phi(r, t)$, on peut à partir de (11.110) déterminer $u_1(x, r, t)$. Ce problè-

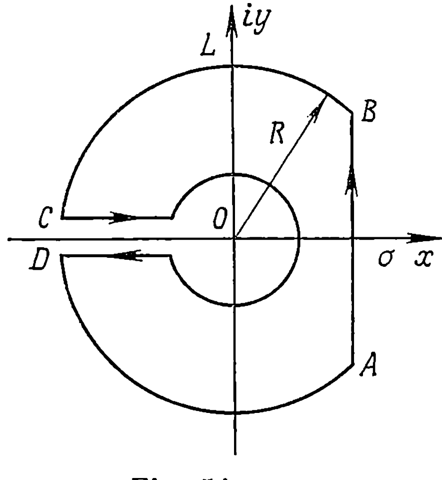


Fig. 54

me comporte des calculs volumineux, mais faciles.

Problème 10. Trouver la solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \qquad (11.112)$$

qui vérifie les conditions

$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad t > 0 \qquad (11.113)$$

$$u(x, t) = \varphi_0(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad x > 0, \qquad (11.114)$$

$$u'_t(x, t) = \varphi_1(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad x > 0 \qquad (11.115)$$

Ce problème se ramène à la résolution de l'équation

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \bar{u} = -\frac{p^2}{c^2} \varphi_0(x) - \frac{p}{c^2} \varphi_1(x) \qquad (11.116)$$

avec les conditions

$$\bar{u}(x, p) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \qquad (11.117)$$

$$\bar{u}(x, p) \to 0 \quad \text{lorsque } x \to \infty \text{ et } \operatorname{Re} p > 0 \qquad (11.118)$$

Cherchons la solution à l'aide de la fonction de Green $G(\xi, x)$. Celle-ci vérifie

les conditions

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\frac{p^2}{c^2}G=0,\quad 0\leqslant x<\xi,\quad \xi<x<\infty, \tag{11.119}$$

$$G(\xi,\ 0)=\lim_{x\to\infty}G(\xi,\ x)=0, \tag{11.120}$$

$$G(\xi,\ \xi-0)=G(\xi,\ \xi+0), \tag{11.121}$$

$$G'(\xi,\ \xi+0)-G'(\xi,\ \xi-0)=-1, \tag{11.122}$$

donc

$$G(\xi,\ x)=Ae^{-\frac{p}{c}x}+Be^{\frac{p}{c}},\qquad x\in[0,\ \xi[,$$

$$G(\xi,\ x)=Ce^{-\frac{p}{c}x}+De^{\frac{p}{c}x},\qquad x\in]\xi,\ \infty[,$$

où A, B, C et D sont des coefficients constants qui se définissent à partir des conditions aux limites. Du comportement de $G(\xi,\ x)$ lorsque $x\to\infty$, il suit que $D=0$. Les conditions (11.120), (11.121) et (11.122) nous conduisent au système d'équations suivant en A, B et C:

$$G(\xi,\ 0)=A+B=0,$$

$$G(\xi,\ \xi-0)=Ae^{-\frac{p}{c}\xi}+Be^{\frac{p}{c}\xi}=G(\xi,\ \xi+0)=Ce^{-\frac{p}{c}\xi},$$

$$C'(\xi,\ \xi+0)-C'(\xi,\ \xi-0)=-\frac{p}{c}Ce^{-\frac{p}{a}\xi}+\frac{p}{c}Ae^{-\frac{p}{c}\xi}-\frac{p}{c}Be^{\frac{p}{c}\xi}=-1;$$

d'où

$$A=-\frac{c}{2p}e^{-\frac{p}{c}\xi},\qquad B=\frac{c}{2p}e^{-\frac{p}{c}\xi},\qquad C=-\frac{c}{2p}\left(e^{-\frac{p}{c}\xi}-e^{\frac{p}{c}\xi}\right).$$

Donc, la fonction de Green est

$$G(\xi,\ x)=\begin{cases}-\dfrac{c}{2p}\left[e^{-\frac{p}{c}(x+\xi)}-e^{\frac{p}{c}(x-\xi)}\right] & \text{lorsque } x\in[0,\ \xi[,\\[2ex] -\dfrac{c}{2p}\left[e^{-\frac{p}{c}(x+\xi)}-e^{\frac{p}{c}(\xi-x)}\right] & \text{lorsque } x\in]\xi,\ \infty[.\end{cases}$$

La solution de l'équation (11.116) qui vérifie les conditions aux limites (11.117), (11.118) est

$$\overline{u}(x,\ p)=\int_0^\infty G(\xi,\ x)\left[\frac{p^2}{c^2}\varphi_0(\xi)+\frac{p}{c^2}\varphi_1(\xi)\right]d\xi=$$

$$=\frac{p}{2c}\int_0^x\left[e^{-\frac{p}{c}(x-\xi)}-e^{-\frac{p}{c}(x+\xi)}\right]\varphi_0(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{p}{2c}\int_x^\infty\left[e^{-\frac{p}{c}(\xi-x)}-e^{-\frac{p}{c}(\xi+x)}\right]\varphi_0(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2c}\int_0^x [e^{-\frac{p}{c}(x-\xi)} - e^{-\frac{p}{c}(x+\xi)}]\, \varphi_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+\frac{1}{2c}\int_x^\infty [e^{-\frac{p}{c}(\xi-x)} - e^{-\frac{p}{c}(x+\xi)}]\, \varphi_1(\xi)\, d\xi =$$

$$=\frac{p}{2}\int_0^\infty \varphi_0(x+c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta + \frac{p}{2}\int_0^{x/c} \varphi_0(x-c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta -$$

$$-\frac{p}{2}\int_{x/c}^\infty \varphi_0(c\eta-x)\, e^{-p\eta}\, d\eta + \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_1(x+c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{x/c} \varphi_1(x-c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta - \frac{1}{2}\int_{x/c}^\infty \varphi_1(c\eta-x)\, e^{-p\eta}\, d\eta.$$

En posant

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= \varphi_0(x) && \text{pour} \quad x \geqslant 0 \\ \Phi_0(x) &= -\varphi_0(-x) && \text{pour} \quad x < 0, \\ \Phi_1(x) &= \varphi_1(x) && \text{pour} \quad x \geqslant 0, \\ \Phi_1(x) &= -\varphi_1(-x) && \text{pour} \quad x < 0, \end{aligned}$$

on aura quel que soit x

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x), \quad \Phi_1(-x) = -\Phi_1(x),$$

donc

$$\bar{u}(x, p) = \frac{p}{2}\int_0^\infty \Phi_0(x+c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta + \frac{p}{2}\int_0^\infty \Phi_0(x-c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi_1(x+c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta + \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi_1(x-c\eta)\, e^{-p\eta}\, d\eta.$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left\{\Phi_0(x+ct) + \Phi_0(x-ct) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \Phi_1(x-c\tau)\, d\tau. \qquad (11.123)\right.$$

P r o b l è m e 11. Trouver les oscillations propres d'une corde fixeé à ses extrémités.

L'équation différentielle des oscillations de la corde est

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2u}{dt^2} \qquad (11.124)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \qquad (11.125)$$

$$u'_t(x, 0) = g(x) \qquad (11.126)$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \qquad (11.127)$$

Ce problème se ramène à la résolution de l'équation

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p^2}{c^2}\bar{u}=-\frac{p^2}{c^2}f(x)-\frac{p}{c^2}g(x) \tag{11.128}$$

avec les conditions

$$\bar{u}(0,\ p)=\bar{u}(l,\ p)=0. \tag{11.129}$$

La fonction de Green de l'opérateur du premier membre de (11.128) avec les conditions aux limites (11.129) s'écrit

$$G(\xi,\ x)=\begin{cases}\dfrac{c}{p}\dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{px}{c}\right)\operatorname{sh}\left[\dfrac{p}{c}(l-\xi)\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)} & \text{pour } x\leqslant\xi,\\[2ex] \dfrac{c}{p}\dfrac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{p\xi}{c}\right)\operatorname{sh}\left[\dfrac{p}{c}(l-x)\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)} & \text{pour } x\geqslant\xi.\end{cases}$$

D'où il vient

$$\bar{u}(x,p)=\int_0^l G(\xi,\ x)\left[\frac{p^2}{c^2}f(\xi)+\frac{p}{c^2}g(\xi)\right]d\xi=$$

$$=\int_0^x \frac{p}{c}f(\xi)\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{p\xi}{c}\right)\operatorname{sh}\left[\dfrac{p(l-x)}{c}\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)}d\xi+$$

$$+\int_x^l \frac{p}{c}f(\xi)\frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{p(l-\xi)}{c}\right]\operatorname{sh}\left(\dfrac{px}{c}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)}d\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{p\xi}{c}\right)\operatorname{sh}\left[\dfrac{p(l-x)}{c}\right]}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)}d\xi+$$

$$+\frac{1}{c}\int_x^l g(\xi)\frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{p(l-\xi)}{c}\right]\operatorname{sh}\left(\dfrac{px}{c}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{pl}{c}\right)}d\xi.$$

En posant $\frac{p}{c}=z$, on obtient

$$\frac{\operatorname{sh} z\xi\operatorname{sh} z(l-x)}{\frac{1}{z}\operatorname{sh} zl}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(z_k\xi)\operatorname{sh}[z_k(l-x)]}{z_k\left(\dfrac{d}{dz}\dfrac{\operatorname{sh} zl}{z}\right)_{z=z_k}}\frac{z^2}{z^2-z_k^2},$$

où z_k sont les zéros de l'équation $\frac{1}{z}\operatorname{sh} zl=0$, i.e. $z_k=\frac{ik\pi}{l}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

donc

$$\frac{\operatorname{sh} z\xi \operatorname{sh} z(l-x)}{\frac{1}{z}\operatorname{sh} zl} = -\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi(l-x)}{l}\,\frac{z^2}{z^2+\frac{k^2\pi^2}{l^2}} =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{k\pi ct}{l}\right).$$

De façon analogue, on a

$$\frac{\operatorname{sh} z(l-\xi)\operatorname{sh} zx}{\frac{1}{z}\operatorname{sh} zl} = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\left(\cos\frac{k\pi ct}{l}\right),$$

$$\frac{\operatorname{sh} z(l-\xi)\operatorname{sh} zx}{\operatorname{sh} zl} = \frac{2c}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\int_0^t \cos\left(\frac{k\pi ct}{l}\right)dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi ct}{l}\right).$$

Ainsi

$$u(x, t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\left\{\cos\left(\frac{k\pi ct}{l}\right)\int_0^l f(\xi)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(\frac{k\pi ct}{l}\right)}{\frac{k\pi c}{l}}\int_0^l g(\xi)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi\right\}. \qquad (11.130)$$

P r o b l è m e 12. Une impulsion S est appliquée sur une corde infinie de densité ρ, reposant sur un appui souple de coefficient de fléchissement k. Trouver l'équation du mouvement de la corde.

On demande la solution de l'équation différentielle

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x} + ku(x, t) = 0 \qquad (11.131)$$

qui vérifie les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_t'(x, 0) = 0 \qquad (11.132)$$

et les conditions aux limites

$$-Tu_x'(0, t) = \frac{S}{2}\delta(t)^{*)}. \qquad (11.133)$$

Cette équation traduit l'équilibre entre la tension de la corde T et l'impulsion S au point $x = 0$. On admet que la flèche de la corde est nulle lorsque $x \to \infty$.

La forme opérationnelle du problème (11.131), (11.132) et (11.133) est

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \left(b^2 + \frac{p^2}{a^2}\right)\bar{u}(x, p) = 0,$$

$$\bar{u}_x'(0, p) = -\frac{Sp}{2T},$$

*) $\delta(t)$ est la fonction delta de Dirac.

où

$$b^2=\frac{k}{T}, \quad a^2=\frac{T}{\rho};$$

donc,

$$\bar{u}(x,\ p)=\frac{S}{2T}\,\frac{p}{\sqrt{b^2+\frac{p}{a^2}}}\,e^{-x\sqrt{b^2+\frac{p^2}{a^2}}}.$$

En appliquant la formule de Sonine

$$\int_0^\infty J_m(u)\,\frac{K_n(\sqrt{u^2+\tau^2}\,p)}{(u^2+\tau^2)^{\frac{n}{2}}}\,u^{m+1}du=\frac{1}{p^n}\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{\tau}\right)^{n-m-1}K_{n-m-1}(\tau\sqrt{p^2+1}),$$

qui est connue en théorie des fonctions de Bessel, on obtient pour $m=0$ et $n=\frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt{u^2+\tau^2}}\,J_0(u)\,\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\tau^2}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}.$$

En faisant la substitution $u^2 = t^2 - \tau^2$, il vient

$$\int_\tau^\infty e^{-pt}J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,d\tau=\int_0^\infty e^{-pt}\Psi(\tau,\ t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}.$$

Donc, la solution cherchée est

$$u(x,\ t)=\begin{cases}\frac{Sa}{2T}\,J_0(b\sqrt{a^2t^2-x^2}) & \text{pour } at>x,\\ 0 & \text{pour } at<x.\end{cases} \tag{11.134}$$

P r o b l è m e 13. Trouver l'intensité i et la tension u d'un courant traversant une ligne infinie ($x > 0$) dont la capacité, la résistance et la fuite sont uniformément distribuées et valent respectivement C, R et G par unité de longueur. L'inductance $L = 0$ (la ligne présente des fuites). Une tension égale à l'unité est appliquée à l'origine de la ligne ($x=0$). La tension et l'intensité initiales ($t = 0$) sont nulles.

Le courant i et la tension u se déduisent à partir du système d'équations

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u}{\partial x}&=Ri,\\ -\frac{\partial i}{\partial x}&=Gu+C\,\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned} \tag{11.135}$$

avec les conditions

$$u(x,\ 0) = i(x,\ 0) = 0, \tag{11.136}$$

$$u(0,\ t) = 1. \tag{11.137}$$

La forme opérationnelle du système d'équations (11.135) est

$$\begin{aligned}-\frac{d\bar{u}}{dx}&=\bar{i}R,\\ -\frac{d\bar{i}}{dx}&-\bar{u}\,(G+pC).\end{aligned} \tag{11.138}$$

En éliminant les fonctions $\bar{i}$ et $\bar{u}$ entre les équations (11.138), on obtient

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}=\gamma^2\bar{u}, \quad \frac{d^2\bar{i}}{dx^2}=\gamma^2\bar{i}, \tag{11.139}$$

où

$$\gamma^2 = R\,(G+pC).$$

La solution générale de la première équation est

$$\bar{u}\,(x,\ p)=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}, \tag{11.140}$$

où A et B sont des constantes quelconques qui se déterminent à partir des conditions aux limites. En portant (11.140) dans (11.138) on trouve $\bar{i}$:

$$\bar{i}=\sqrt{\frac{G+pC}{R}}\,(Ae^{-\gamma x}-Be^{\gamma x}). \tag{11.141}$$

Le comportement de u et i à l'infini entraîne la nullité du coefficient B (Re $\gamma>0$) dans les équations (11.140), (11.141). Ceci explique la disparition de l'onde réfléchie. La solution des équations opérationnelles (11.135) est donc

$$\bar{u}\,(x,\ p)=Ae^{-x\sqrt{R(G+pC)}}, \tag{11.142}$$

$$\bar{i}\,(x,\ p)=A\sqrt{\frac{G+pC}{R}}\,e^{-x\sqrt{R(G+pC)}}. \tag{11.143}$$

De la condition aux limites (11.137), on déduit que $A=1$, donc

$$\bar{u}\,(x,\ p)=e^{-x\sqrt{RC}\sqrt{p+a}}, \tag{11.144}$$

$$\bar{i}\,(x,\ p)=\sqrt{\frac{C}{R}}\,\sqrt{p+a}\,e^{-x\sqrt{RC}\sqrt{p+a}}, \tag{11.145}$$

où $a=\frac{G}{C}$.

Appliquons la formule (11.64) au calcul des opérateurs (11.144) et (11.145). Il vient (cf. 11.38):

$$e^{-\sqrt{ap}}=\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\right),$$

$$e^{-\sqrt{a(p+\alpha)}}=e^{-\alpha t}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}\right)+\alpha\int_0^t e^{-\alpha\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\xi}}\right)d\xi. \tag{11.146}$$

Le calcul de l'intégrale de (11.146) nous conduit à l'expression

$$e^{-\sqrt{a(p+\alpha)}}=\frac{1}{2}\left[e^{-\sqrt{\alpha a}}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}-\sqrt{\alpha t}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{\sqrt{\alpha a}}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}}+\sqrt{\alpha t}\right)\right]. \tag{11.147}$$

La formule (cf. (7.11))

$$\sqrt{p}\,e^{-\sqrt{ap}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{a}{4t}}$$

entraîne la formule

$$\sqrt{p+\alpha}\, e^{-\sqrt{a(p+\alpha)}} = e^{-\alpha t} \frac{e^{-\frac{a}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} + \alpha \int_0^t e^{-\alpha\xi} \frac{e^{-\frac{a}{4\xi}}}{\sqrt{\pi\xi}} d\xi. \qquad (11.148)$$

Le calcul de l'intégrale de (11.148) donne

$$\sqrt{p+\alpha}\, e^{-\sqrt{a(p+\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a}{4t}-\alpha t} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left\{ e^{-\sqrt{\alpha a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}} - \sqrt{\alpha t}\right) - e^{\sqrt{\alpha a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\alpha t}\right)\right\}. \qquad (11.149)$$

En définitive, à partir des formules (11.144) et (11.145) et compte tenu de (11.147) et (11.149), on obtient les expressions suivantes pour la tension et le courant

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left\{ e^{-x\sqrt{RG}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{G}{C}t}\right) + e^{x\sqrt{RG}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{G}{C}t}\right)\right\}, \qquad (11.150)$$

$$i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2RC}{4t}-\frac{G}{C}t} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{R}}\left\{ e^{-x\sqrt{RC}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{G}{C}t}\right) + e^{x\sqrt{RG}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{G}{C}t}\right)\right\}. \qquad (11.151)$$

Problème 14. Trouver l'équation des oscillations longitudinales d'une tige dont une extrémité est encastrée et l'autre soumise à une force $F = \sin \omega t$ dirigée le long de l'axe de la tige.

Soit $u(x, t)$ le déplacement longitudinal de la section de la tige à une distance x de l'extrémité encastrée. Soit l la longueur de la tige.

Le problème consiste donc à intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in 0], \quad l\, [t > 0, \qquad (11.152)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0 \qquad (11.153)$$

et les conditions aux limites

$$u(0, t) = 0, \quad Eu'_t(l, t) = \sin \omega t, \quad t > 0, \qquad (11.154)$$

où a et E sont des constantes. L'équation transformée s'écrit

$$p^2\bar{u} = a^2 \frac{d^2\bar{u}}{dx^2}$$

avec les conditions $\bar{u}(0, p) = 0$ et $E\bar{u}_x(l, p) = \frac{\omega p}{p^2+\omega^2}$. De toute évidence,

la solution de l'équation transformée vérifiant ces conditions est l'opérateur

$$\bar{u}(x, p)=\frac{b}{p^2+\omega^2}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{px}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{pl}{a}\right)},\quad b=\frac{\omega_a}{E}.$$

En calculant cet opérateur, on obtient

$$u(x, t)=\frac{b^2}{\omega^2}\,\frac{\sin\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\sin\omega t+\frac{2b}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n}\,\frac{\sin k_n x}{\omega^2-k_n^2a^2}\sin k_n at, \quad (11.155)$$

où $k_n=\frac{\pi}{l}\left(n-\frac{1}{2}\right)$. On suppose qu'il n'y a pas de résonance, i.e. $\omega\neq ak_n$.

Problème 15. Trouver l'équation des oscillations transversales d'une tige homogène de longueur infinie, oscillant librement sous une impulsion S, appliquée au point $x = 0$, perpendiculairement à son axe.

Les oscillations libres d'une tige homogène obéissent à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \quad (11.156)$$

où $u(x, t)$ est l'écart de l'axe de la tige pendant les oscillations transversales, x la coordonnée, t le temps, le coefficient $c=\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$ la vitesse de propagation de la déformation, EJ la rigidité à la flexion (μ la masse d'une unité de longueur, E le module d'élasticité, J le moment d'inertie de la section droîte par rapport à l'axe neutre de la section, qui est perpendiculaire au plan d'oscillations).

Supposons que les conditions initiales définies par la distribution initiale des écarts transversaux et des vitesses sur l'axe de la tige ont pour expressions

$$u(x, 0) = 0 \quad (11.157)$$

$$u_t'(x, 0) = 0 \quad (11.158)$$

La condition aux limites est

$$u_x'(0, t)=0, \quad (11.159)$$

$$u_{x^3}'''(0, t)=\frac{S}{2EJ}\,\delta(t)\text{*)}. \quad (11.160)$$

Pour raison de symétrie, on considérera la section de droite de la tige $x\in\,]0, \infty[$. La forme opérationnelle des équations (11.157) à (11.160) est

$$\frac{d^4\bar{u}}{dx^4}+\frac{p^2}{c^2}u=0, \quad (11.161)$$

$$\bar{u}_x'(0, p)=0, \quad (11.162)$$

$$u_{x^3}'''(0, p)=\frac{S}{2EJ}. \quad (11.163)$$

Si l'on pose $\frac{1}{c^2}=4\alpha^4$ l'équation (11.161) devient

$$\frac{d^4\bar{u}}{dx^4}+(\alpha\sqrt{2p})^4\,\bar{u}=0. \quad (11.164)$$

---

*) Ici $\delta(t)$ est la fonction delta de Dirac.

La solution générale de (11.164) est

$$\bar{u}(x,\ p)=c_1e^{x(1+i)\alpha\sqrt{p}}+c_2e^{x(-1-i)\alpha\sqrt{p}}+$$
$$+c_3e^{x(-1+i)\alpha\sqrt{p}}+c_4e^{x(1-i)\alpha\sqrt{p}}, \qquad (11.165)$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes arbitraires qui se déterminent à partir des conditions aux limites. Le comportement de la solution, lorsque $x\to\infty$, entraîne la nullité des constantes c_1 et c_2 et la solution (11.165) s'écrit

$$\bar{u}(x,\ p)=e^{-\alpha x\sqrt{p}}(A\cos\alpha x\sqrt{p}+B\sin\alpha x\sqrt{p}).$$

Après détermination des constantes A et B à partir des conditions (11.162) et (11.163), la solution s'écrit

$$\bar{u}(x,\ p)=\frac{S}{8EJ\alpha^3}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha x\sqrt{p}}(\cos\alpha x\sqrt{p}+\sin\alpha x\sqrt{x}). \qquad (11.166)$$

Pour achever la résolution il reste à calculer l'opérateur

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha x\sqrt{p}}(\cos\alpha x\sqrt{p}+\sin\alpha x\sqrt{p}), \qquad (11.167)$$

Soit l'expression connue

$$e^{-\lambda\sqrt{p}}=1-\operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (11.168)$$

Si l'on pose $\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}=x(1+i)$ dans l'intégrale

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}\,d\xi, \qquad (11.169)$$

on obtient

$$\operatorname{erf}[x(1+i)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x(1+i)}e^{-\xi^2}\,d\xi. \qquad (11.170)$$

Le changement de variables

$$\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)\,\eta$$

ramène l'intégrale (11.170) à la forme

$$\operatorname{erf}[x(1+i)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)\int_0^{\frac{2x}{\sqrt{\pi}}}e^{-i\frac{\eta}{2}\eta^2}\,d\eta=$$
$$=(1+i)\int_0^{\frac{2x}{\sqrt{\pi}}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right)\right\}d\eta.$$

Les intégrales

$$C(u)=\int_0^u\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \quad \text{et} \quad S(u)=\int_0^u\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx \qquad (11.171)$$

s'appellent *intégrales de Fresnel*. La méthode la plus simple de calcul de valeurs de ces intégrales fait intervenir les fonctions de Bessel. En posant $z = \frac{\pi x^2}{2}$, on obtient

$$C(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \, dz = \frac{1}{2}\int_0^z J_{-\frac{1}{2}}(z)\, dz,$$

$$S(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \, dz = \frac{1}{2}\int_0^z J_{\frac{1}{2}}(z)\, dz;$$

donc,

$$\operatorname{erf}[x(1+i)] = (1+i)\left[C\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}} - iS\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\right)\right.\right. . \qquad (11.172)$$

Posant $\lambda = 1 + i$ dans (11.168), on obtient en vertu de (11.172)

$$e^{-\sqrt{p}}(\cos\sqrt{p} - i\sin\sqrt{p}) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{2\sqrt{t}}\right) =$$

$$= 1 - (1+i)\left[C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - iS\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right)\right], \qquad (11.173)$$

d'où il suit après comparaison des parties réelles et imaginaires

$$e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p} = 1 - C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right), \qquad (11.174)$$

$$e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p} = C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right); \qquad (11.175)$$

par conséquant

$$e^{-\alpha\sqrt{p}}\sin(\alpha\sqrt{p}) = C\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) - S\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right). \qquad (11.176)$$

Une intégration sur α de la dernière expression donne

$$\int e^{-\alpha\sqrt{p}}\sin(\alpha\sqrt{p})\, d\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{p}}\, e^{-\alpha\sqrt{p}}(\sin\alpha\sqrt{p} + \cos\alpha\sqrt{p}) =$$

$$= \int C\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) d\alpha - \int S\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) d\alpha = \alpha C\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) - \int \frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\cos\left(\frac{\alpha^2}{2t}\right) d\alpha -$$

$$-\alpha S\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) + \int \frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\sin\left(\frac{\alpha^2}{2t}\right) d\alpha = \alpha C\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) - \alpha S\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}}\right) -$$

$$-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\sin\left(\frac{\alpha^2}{2t}\right) - \sqrt{\frac{t}{\pi}}\cos\left(\frac{\alpha^2}{2t}\right).$$

En faisant $\alpha = 1$, il vient

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}\, e^{-\sqrt{p}}(\sin\sqrt{p} + \cos\sqrt{p}) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(\sin\frac{1}{2t} + \cos\frac{1}{2t}\right) +$$

$$+ S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right). \qquad (11.177)$$

En utilisant la dernière formule on ramène l'opérateur $\bar{u}(x, p)$ de (11.166) à la fonction

$$u(x, t)=\frac{Sx}{4EJ\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha x}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(\sin\frac{\alpha^2x^2}{2t}+\cos\frac{\alpha^2x^2}{2t}\right)+\right.$$

$$\left.+S\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\pi t}}\right)-C\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\pi t}}\right)\right\}=\frac{Sx}{4EJ\alpha^2}\left\{\frac{1}{\pi\tau}\left(\sin\frac{\pi\tau^2}{2}+\cos\frac{\pi\tau^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+S(\tau)-C(\tau)\right\},$$

où $\tau=\frac{\alpha x}{\sqrt{\pi t}}$.

Si dans le problème que nous venons de voir, on applique instantanément à la tige une force Q, qui restera constante, on obtient l'équation des oscillations transversales de la tige en remplaçant S par $\frac{Q}{p}$. En effet, les conditions sont les mêmes à la seule différence que

$$u'''_{x^3}(0, t)=\frac{Q}{2EJ}$$

et

$$\bar{u}'''_{x^3}(0, p)=\frac{Q}{2EJ},$$

donc

$$\bar{u}(x, p)=\frac{Q}{8EJ\alpha^3}\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\alpha x\sqrt{p}}(\cos\alpha x\sqrt{p}+\sin\alpha x\sqrt{p})$$

et

$$u(x, t)=\frac{Qx}{4EJ\alpha^2}\int_0^t\left\{\frac{1}{\alpha x}\sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\left(\sin\frac{\alpha^2x^2}{2\xi}+\cos\frac{\alpha^2x^2}{2\xi}\right)+\right.$$

$$\left.+S\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\pi\xi}}\right)-C\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{\pi\xi}}\right)\right\}d\xi=\frac{Qx^3}{4EJ}\left\{\int_0^{\frac{t}{\alpha^2x^2}}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left(\cos\frac{1}{2\tau}+\sin\frac{7}{2\tau}\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{t}{\alpha^2x^2}}\left[S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right)-C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right)\right]d\tau\right\}. \qquad (11.178)$$

§ 12. Applications du calcul opérationnel à la théorie des fonctions spéciales

1. Fonctions cylindriques. On appelle cylindriques des fonctions qui sont solutions de l'équation différentielle de Bessel

$$t^2x''(t)+tx'(t)+(t^2-n^2)x(t)=0, \qquad (12.1)$$

où n est un entier. On cherchera la solution par la méthode opérationnelle. Supposons que la solution $x(t)$ appartient à S et que

$$\bar{x}(p)=p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt, \quad p=\sigma+i\tau. \qquad (12.2)$$

Dans ce cas (cf. (5.66))

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}(p), \\ x'(t) &= p\bar{x}(p) - px_0, \\ x''(t) &= p^2\bar{x}(p) - p^2x_0 - px_1, \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

où $x_0 = x(0)$ et $x_1 = x'(0)$.

Eu égard à (cf. (5.61))

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\bar{x}(p)}{p}\right) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}\,dt = -\int_0^\infty tx(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

il vient

$$tx(t) = -p\frac{d}{dp}\left(\frac{\bar{x}(p)}{p}\right), \tag{12.4}$$

$$t^2x(t) = p\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\bar{x}(p)}{p}\right). \tag{12.5}$$

De (12.3), (12.4), (12.5) on déduit

$$tx'(t) = -p\frac{d}{dp}\left[\frac{p\bar{x}(p) - px_0}{p}\right] = -p\frac{d\bar{x}(p)}{dp}, \tag{12.6}$$

$$t^2x''(t) = p\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p^2\bar{x}(p) - p^2x_0 - px_1}{p}\right] = p\frac{d^2}{dp^2}[p\bar{x}(p)]. \tag{12.7}$$

En appliquant les formules (12.5), (12.6), (12.7) et (12.2), on peut passer de l'équation (12.1) à l'équation en l'opérateur $\bar{x}(p)$:

$$p\frac{d^2}{dp^2}\left(p\bar{x}(p)\right) - p\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + p\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\bar{x}(p)}{p}\right) - n^2\bar{x}(p) = 0,$$

ou

$$p\left(2\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + p\frac{d^2\bar{x}(p)}{dp^2}\right) - p\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + p\left[\frac{2\bar{x}(p)}{p^3} - \frac{2}{p^2}\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p}\frac{d^2\bar{x}(p)}{dp^2}\right] - n^2\bar{x}(p) = 0,$$

ou encore

$$(1+p^2)\frac{d^2\bar{x}(p)}{dp^2} + \left(p - \frac{2}{p}\right)\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + \left(\frac{2}{p^2} - n^2\right)\bar{x}(p) = 0 \tag{12.8}$$

Dans cette équation différentielle, $p = \sigma + i\tau$ est un nombre complexe. Pour la résoudre, faisons le changement de variables $p = \operatorname{sh} z$, $\bar{x}(p) = \operatorname{th} zw$:

$$1 + p^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch}^2 z, \quad \frac{dp}{dz} = \operatorname{ch} z.$$

$$\frac{d\bar{x}(p)}{dp} = \frac{d(\operatorname{th} z \cdot w)}{dz}\frac{dz}{dp} = \left(\frac{w}{\operatorname{ch}^2 z} + \operatorname{th} z\frac{dw}{dz}\right)\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{w}{\operatorname{ch}^3 z} + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z}\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d^2\bar{x}(p)}{dp^2} = \left(-\frac{3\operatorname{sh} zw}{\operatorname{ch}^4 z} + \frac{2}{\operatorname{ch}^3 z}\frac{dw}{dz} - \frac{\operatorname{th} z \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^2 z}\frac{dw}{dz} + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z}\frac{d^2w}{dz^2}\right)\frac{1}{\operatorname{ch} z} =$$

$$= -\frac{3w \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^5 z} + \frac{2}{\operatorname{ch}^4 z}\frac{dw}{dz} - \frac{\operatorname{th} z \cdot \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z}\frac{dw}{dz} + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch}^2 z}\frac{d^2w}{dz^2},$$

$$(1+p^2)\frac{d^2\bar{x}(p)}{dp^2} + \left(p - \frac{2}{p}\right)\frac{d\bar{x}(p)}{dp} + \left(\frac{2}{p^2} - n^2\right)\bar{x}(p) = -\frac{3w \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} +$$

$$+ \frac{2}{\operatorname{ch}^2 z}\frac{dw}{dz} - \operatorname{th}^2 z \frac{dw}{dz} + \operatorname{th} z \frac{d^2w}{dz^2} + \left(\operatorname{sh} z - \frac{2}{\operatorname{sh} z}\right)\left(\frac{w}{\operatorname{ch}^3 z} + \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z}\frac{dw}{dz}\right) +$$

$$+ \left(\frac{2}{\operatorname{sh}^2 z} - n^2\right)\operatorname{th} z w = \operatorname{th} z \frac{d^2w}{dz^2} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\operatorname{ch}^2 z} - \operatorname{th}^2 z + \frac{\operatorname{sh} z \operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z} - \frac{2 \operatorname{th} z}{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}\right)\frac{dw}{dz} +$$

$$+ \left(-\frac{3 \operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} + \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} - \frac{2}{\operatorname{sh} z \operatorname{ch}^3 z} + \frac{2 \operatorname{th} z}{\operatorname{sh}^2 z} - n^2 \operatorname{th} z\right) w =$$

$$= \operatorname{th} z \frac{d^2w}{dz^2} - n^2 \operatorname{th} z w.$$

On obtient donc l'équation

$$\frac{d^2w}{dz^2} - n^2 w = 0$$

d'où l'on tire

$$w = c_1 e^{nz} + c_2 e^{-nz}.$$

Il faut maintenant revenir aux anciennes variables p et $\bar{x}(p)$. On a

$$p = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{ou} \quad e^z - e^{-z} = 2p,$$

d'où

$$e^{2z} - 2pe^z - 1 = 0;$$

donc

$$e^z = p \pm \sqrt{p^2+1}.$$

On peut distinguer une branche univoque de la fonction $\sqrt{p^2+1}$ dans le plan de la variable complexe $p = \sigma + i\tau$, muni d'une coupure le long du segment $\sigma = 0$, $|\tau| < 1$. On conviendra que $\sqrt{p^2+1}$ représente la branche de la fonction, qui prend des valeurs positives lorsque p est réel. Or, si p est réel, z le sera de même donc $e^z > 0$, et entre les deux racines de l'équation (12.8) il faut choisir

$$e^z = p + \sqrt{p^2+1}. \tag{12.9}$$

On a

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 z}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

donc

$$\bar{x}(p) = \operatorname{th} z w = c_1 \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(p + \sqrt{p^2+1}\right)^n +$$

$$+ c_2 \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(p + \sqrt{p^2+1}\right)^{-n}.$$

Lorsque $n=0$, la solution de l'équation (12.8) s'écrit

$$\bar{x}(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=J_0(t).$$

Cette fonction a été examinée au § 7. Lorsque $n>0$ l'expression $(p+\sqrt{p^2+1})^n$ tend vers l'infini avec $|p|$. Donc $c_1=0$. Posons $c_2=1$, il vient

$$\bar{x}(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}+p)^{-n}.$$

En remarquant que

$$\sqrt{p^2+1}+p=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}-p},$$

on déduit

$$\bar{x}(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n.$$

La régularité de l'opérateur $\bar{x}(p)$ découle aussitôt de l'égalité

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^n}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-n}.$$

En se servant de cette égalité on peut développer $\bar{x}(p)$ suivant les puissances de $\frac{1}{p}$ pour $|p|>1$. On se limitera aux premiers termes. On se servira de la formule du binôme de Newton

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots, \quad (12.10)$$

qui, on le sait, est valable pour tout α réel et $|x|<1$. On obtient

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}-\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{p^4}+\ldots,$$

donc

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right)^{-n}=\left(1-\frac{1}{2p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}-\ldots\right)\times$$

$$\times\left(2+\frac{1}{2p^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{p^4}+\ldots\right)^{-n}=$$

$$=2^{-n}\left(1-\frac{1}{2p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2^2p^2}-\frac{1}{16p^4}+\ldots\right)^{-n}=$$

$$=2^{-n}\left(1-\frac{1}{2p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}\right)\left[1-n\left(\frac{1}{2^2p^2}-\frac{1}{16p^4}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2^2p^2}-\frac{1}{16p^4}+\ldots\right)^2+\ldots\right].$$

et

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right)^{-n}=2^{-n}\left[1-\frac{1}{2p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}-\right.$$

$$\left.-\frac{n}{2^2p^2}+\frac{n}{16p^4}+\frac{n}{8p^4}+\frac{n(n+1}{1\cdot 2}\frac{1}{2^4p^4}+\ldots\right]=$$

$$=2^{-n}\left[1-\frac{n+2}{2^2\cdot p^2}+\frac{12+6n+n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 2^4\cdot p^4}+\ldots\right]=$$

$$=2^{-n}\left[1-\frac{n+2}{2^2p^2}+\frac{(n+3)(n+4)}{2!\,2^4p^4}+\ldots\right],$$

par conséquent,

$$\bar{x}(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n=\frac{1}{2^np^n}-\frac{n+2}{2^{n+2}p^{n+2}}+$$

$$+\frac{(n+3)(n+4)}{2!\,2^{n+4}p^{n+4}}+\ldots \quad (12.11)$$

Donc,

$$\bar{x}(p)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n$$

est une fonction. On l'appelle *fonction de Bessel* d'ordre n et on la note $J_n(t)$. En définitive, la solution de l'équation (12.1) est

$$J_n(t)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n=\bar{F}(p). \quad (12.12)$$

De (12.11) il suit

$$J_n(t)=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n}{n!}-\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2}}{1!\,(n+1)!}+\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+4}}{2!\,(n+2)!}-\ldots$$

Des calculs plus fins donnent

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}. \quad (12.13)$$

La série (12.13) est commode pour le calcul de $J_n(t)$ pour des petites valeurs de t. Si t est grand, plus exactement $t \gg n$, on a intérêt à appliquer les résultats du § 8 pour déduire la série asymptotique de $J_n(t)$.

Calculons le premier terme de ce développement, i.e. trouvons la représentation asymptotique de $J_n(t)$ lorsque $t \to \infty$. La fonction

$$\frac{\bar{F}(p)}{p}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n$$

remplit les conditions du théorème du § 8. Elle possède deux points singuliers $p_1 = i$ et $p_2 = -i$, qui sont des points de ramification dont les parties réelles sont nulles. Comme $\bar{F}(p)$ est un opérateur régulier, $\frac{\bar{F}(p)}{p}$ remplit les conditions du lemme de Jordan. Pour construire le développement asymptotique de $J_n(n)$ lorsque $t \to \infty$, il faut calculer les premiers coefficients du développement de $\frac{\bar{F}(p)}{p}$ dans les séries

$$\frac{\bar{F}(p)}{p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(1)} (p-i)^{\lambda_\nu^{(1)}} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{F}(p)}{p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(2)} (p+i)^{\lambda_\nu^{(2)}} .$$

On a (cf. (12.10))

$$\sqrt{p^2+1} = \sqrt{p-i}\sqrt{p+i} = (p-i)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1+\frac{p-i}{2i}\right)2i} =$$

$$= \sqrt{2i}\,(p-i)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{p-i}{2i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2i}\,(p-i)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{p-i}{2i}\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{p-i}{2i}\right)^2 + \dots\right) =$$

$$= \sqrt{2i}\left[(p-i)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4i}(p-i)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{32}(p-i)^{\frac{5}{2}} + \dots\right], \quad (12.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2i}}(p-i)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{p-i}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2i}}\left[(p-i)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4i}(p-i)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{32}(p-i)^{\frac{3}{2}} + \dots\right]. \quad (12.15)$$

Pour obtenir le développement de $\frac{\bar{F}(p)}{p}$ au voisinage du point $p = i$, on remarquera que

$$\frac{\bar{F}(p)}{p} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n = \frac{(-i)^n}{\sqrt{p^2+1}}\left(1+\frac{p-i}{i}-\frac{\sqrt{p+1}}{i}\right)^n .$$

En remplaçant $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ et $\sqrt{p^2+1}$ par leurs développements (12.14) et (12.15), on obtient

$$\frac{\bar{F}(p)}{p} = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2i}}\left[(p-i)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4i}(p-i) + \dots\right]\left[1+\frac{p-i}{i}-\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2i}}{i}\left((p-i)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4i}(p-i)^{\frac{3}{2}} + \dots\right)\right]^n =$$

$$=\frac{(-i)^n}{\sqrt{2i}}(p-i)^{-\frac{1}{2}}+n(-i)^{n-1}+\left(\frac{n}{i}-\frac{1}{4i}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{2i}{i^2}\right)\frac{(-i)^n}{\sqrt{2i}}(p-i)^{\frac{1}{2}}+\ldots .$$

Donc,

$$\lambda_0^{(1)}=-\frac{1}{2},\quad \lambda_1^{(1)}=0,\quad \lambda_2^{(1)}=\frac{1}{2},\ \ldots;$$

$$c_0^{(1)}=\frac{(-i)^n}{\sqrt{2i}};\quad c_2^{(2)}=\frac{4n^2-1}{i}\frac{(-i)^n}{\sqrt{2i}}.$$

Comme $\frac{1}{\Gamma(0)}=0$, il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients $c_1^{(1)}$ et $c_2^{(2)}$. Pour calculer $\sqrt{2i}$ il faut prendre $i=e^{\frac{\pi i}{2}}$, donc $\sqrt{2i}=$ $=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ et

$$c_0^{(1)}=e^{\left(\frac{\pi i}{2}-\pi i\right)n-\frac{\pi i}{4}}(2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{2}\right)i};$$

$$c_2^{(1)}=\frac{4n^2-1}{4i\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi i}{2}+\pi i\right)n-\frac{\pi i}{4}}=\frac{4n^2-1}{4i\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}.$$

Le développement de $\frac{\overline{F}(p)}{p}$ au voisinage du point $p=-i$ se déduit de façon analogue. On aura

$$c_0^{(2)}=\frac{i^n}{\sqrt{-2i}}=\frac{e^{\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}}{\sqrt{2}},$$

$$c_2^{(2)}=-\frac{4n^2-1}{4i}\frac{i^n}{\sqrt{-2i}}=-\frac{4n^2-1}{4i\sqrt{2}}e^{\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)i}.$$

Le premier terme du développement asymptotique est

$$\frac{e^{it}c_0^{(1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}+1}}+\frac{e^{-it}c_0^{(2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{e^{i\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}\sqrt{t}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc, lorsque $t\to\infty$,

$$J_n(t)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (12.17)$$

Le second terme est

$$\frac{e^{itc_2^{(1)}}+e^{-itc_2^{(2)}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)t^{3/2}}=\frac{4n^2-1}{4\sqrt{2}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{e^{i\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{it^{3/2}}.$$

Or $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$, donc

$$\frac{e^{itc_2^{(1)}}+e^{-itc_2^{(2)}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)t^{3/2}}=-\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\frac{4n^2-1}{8t}\sin\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

et

$$J_n t=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\cos\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{4n^2-1}{8t}\sin\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right). \qquad (12.18)$$

En appliquant les méthodes du calcul opérationnel, on peut établir de nombreuses relations faisant intervenir les fonctions de Bessel. Soit l'opérateur $p\,(\sqrt{p^2+1}-p)^n$. L'égalité

$$p\,(\sqrt{p^2+1}-p)^n=\frac{1}{p^{n-1}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right)^{-n}$$

entraîne la réductibilité de cet opérateur à une fonction lorsque $n>0$.

Cherchons cette fonction. Soit

$$p\,(\sqrt{p^2+1}-p)^n=\varphi(t),$$

alors

$$p\,\frac{d}{dp}(\sqrt{p^2+1}-p)^n=-t\varphi(t),$$

ou

$$pn\,(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1^{-1}}}\right)=-t\varphi(t),$$

ou encore

$$-\frac{np}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n=-t\varphi(t).$$

Donc, $nJ_n(t)=t\varphi(t)$, d'où

$$p\,(\sqrt{p^2+1}-p)^n=\frac{n}{t}J_n(t). \qquad (12.19)$$

Par ailleurs,

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left[(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}+(\sqrt{p^2+1}-p)^{n+1}\right]=$$

$$=\frac{p}{\sqrt{p+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}-p}+(\sqrt{p^2+1}-p)\right],$$

d'où

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n\frac{2\left[(1+p^2)-p\sqrt{p^2+1}\right]}{\sqrt{p^2+1}-p}=$$

$$=2p\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n;$$

et (cf. (12.19))

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t)=\frac{2n}{t}J_n(t). \tag{12.20}$$

On peut obtenir une autre formule de récurrence pour les fonctions de Bessel à partir de la différence

$$J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n\frac{1-\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^2}{\sqrt{p^2+1}-p}=$$

$$=\frac{2p^2}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n.$$

Or lorsque $n>0$, on obtient

$$\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n=pJ_n(t)=J_n'(t),$$

donc

$$J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)=2J_n'(t). \tag{12.21}$$

La formule (12.21) est valable pour $n=0$:

$$J_0'(t)=-J_1(t). \tag{12.22}$$

L'équation différentielle de Bessel (12.1) est du second ordre, elle admet donc deux solutions linéairement indépendantes. En théorie des fonctions de Bessel on démontre que cette équation admet une solution dont le développement asymptotique lorsque $t\to\infty$ est $\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. Cette solution notée $Y_n(t)$ s'appelle *fonction de Neumann-Bessel* du second genre. Parfois au lieu de $Y_n(t)$ on rencontre la notation $N_n(t)$. Donc, lorsque $n\to\infty$

$$Y_n(t)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\left(t-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{12.23}$$

De (12.23) et (12.17) suit l'indépendance linéaire des fonctions $J_n(t)$ et $Y_n(t)$. Ainsi, toute solution de l'équation (12.1) est susceptible d'être représentée par une combinaison linéaire $c_1J_n(t)+$ $+c_2Y_n(t)$. On prouve que le point $t=0$ est singulier pour $Y_n(t)$. Ceci vient du fait que $t=0$ n'est pas un point régulier pour l'équation (12.1). Par analogie avec l'égalité $\cos\varphi\pm i\sin\varphi=e^{\pm i\varphi}$, on peut introduire les solutions de l'équation (12.1):

$$H_n^{(1)}(t)=J_n(t)+iY_n(t)$$

$$H_n^{(2)}(t)=J_n(t)-iY_n(t). \tag{12.24}$$

Les fonctions cylindriques $H_n^{(1)}(t)$ et $H_n^{(2)}(t)$ s'appellent *fonctions de Hankel.*

Toutes les fonctions cylindriques étudiées ici sont prolongeables dans le domaine complexe, i.e. on peut envisager les valeurs de $J_n(t)$, $Y_n(t)$, $H_n^{(1)}(t)$ et $H_n^{(2)}(t)$ pour les valeurs complexes de t. En particulier, de (12.13) il vient

$$J_n(it) = \sum_{k=\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{it}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} = i^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}$$

La série de droite est désignée par $I_n(t)$:

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}. \tag{12.25}$$

C'est une fonction cylindrique appelée *fonction de Bessel de i.*

On a

$$I_n(t) = e^{-\frac{i\pi n}{2}} J_n(it). \tag{12.26}$$

Si dans l'équation (12.1), on fait le changement $t = i\tau$, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{i}\frac{dx}{d\tau}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{i}{i^2}\frac{d^2x}{d\tau^2},$$

et l'équation s'écrit

$$\tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \tau \frac{dx}{d\tau} - (\tau^2 + n^2)\,x = 0. \tag{12.27}$$

Cette équation est vérifiée par la fonction $J_n(it)$, donc $I_n(t)$ sera solution de l'équation (12.27).

Soit $K_n(t)$ la deuxième solution de (12.27). Elle vaut

$$K_n(t) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\pi n}{2}} H_n^{(1)}(it).$$

La fonction cylindrique $K_n(t)$ est parfois appelée *fonction de Mac Donald.*

L'équation (12.27) peut être résolue par la méthode opérationnelle comme l'équation (12.1). Dans ce cas, l'image opérationnelle de $I_n(t)$ est

$$I_n(t) = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left(p - \sqrt{p^2-1}\right)^n. \tag{12.28}$$

On obtient le développement asymptotique de $I_n(t)$ lorsque $t \to \infty$ en se servant de (12.28). Les points singuliers seront $p_1 = 1$ et $p_2 = -1$. On ne retiendra que $p = 1$. Le développement au voisinage de ce point est analogue à (12.6). Tous calculs faits, lorsque $t \to \infty$, on obtient

$$I_n(t) \sim \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \frac{4n^2-1}{8t} + \dots\right). \tag{12.29}$$

Donnons sans le démontrer le développement asymptotique de $K_n(t)$ lorsque $t \to \infty$;

$$K_n(t) \sim e^{-t} \sqrt{\frac{n}{2t}} \left(1 + \frac{4n^2-1}{8t} + \ldots\right). \tag{12.30}$$

Dans les applications on se sert souvent des fonctions cylindriques avec leurs modifications, notamment les fonctions

$$I_\nu(2\sqrt{t}) = t^{\frac{\nu}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \tag{12.31}$$

$$I_\nu(2\sqrt{t}) = t^{\frac{\nu}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \tag{12.32}$$

et

$$Y_\nu(2\sqrt{t}), \quad K_\nu(2\sqrt{t}). \tag{12.33}$$

De (12.31) il vient

$$t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,p^{k+\nu}},$$

d'où $t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{t}) = \frac{1}{p^\nu} e^{\frac{1}{p}}$.

De là suit (cf. (5.56))

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{t\lambda}) = \frac{1}{p^\nu} e^{\frac{\lambda}{p}}, \tag{12.34}$$

de façon analogue,

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t\lambda}) = \frac{1}{p^\nu} e^{-\frac{\lambda}{p}}. \tag{12.35}$$

2. Polynômes de Laguerre. Au § 5 (5.7) on a introduit les polynômes de Laguerre

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{k!}, \tag{12.36}$$

où $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| = \frac{n!}{k!\,(n-k)}$. Si l'on remplace $\frac{t^k}{k!}$ par $\frac{1}{p^k}$ dans (12.36), on obtient l'image opérationnelle des polynômes de Laguerre:

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p^k},$$

ou encore

$$L_n(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n. \tag{12.37}$$

L'égalité (12.37) peut servir à la définition des polynômes de Laguerre. En vertu de la propriété 4 du § 5, il vient

$$e^{-t}L_n(t) = \frac{p}{p+1}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)^n = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1}. \qquad (12.38)$$

Si l'on met cette égalité sous la forme

$$e^{-t}L_n(t) = p^n \frac{p}{(p+1)^{n+1}},$$

et eu égard à (cf. (5.46)

$$\frac{p}{(p+1)^{n+1}} = \left(\frac{t^n e^{-t}}{n!}\right),$$

et à (5.23), on obtient

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n e^{-t}}{n!}\right). \qquad (12.39)$$

De (12.37) il suit

$$L_{n+1}(t) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{p}\right)L_n(t) = L_n(t) - \int_0^t L_n(u)\,du.$$

Donc,

$$L_n(t) - L_{n+1}(t) = \int_0^t L_n(u)\,du. \qquad (12.40)$$

(12.38) entraîne

$$e^{-t}(L_{n-1}(t) - L_n(t)) = \left(\frac{p}{p+1}\right)^n - \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1}\left(\frac{p+1}{p}-1\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{p}(e^{-t}L_n(t)) =$$

$$= \int_0^t e^{-u}L_n(u)\,du,$$

i.e.

$$e^{-t}(L_{n-1}(t) - L_n(t)) = \int_0^t e^{-u}L_n(u)\,du. \qquad (12.41)$$

De l'égalité

$$n(L_n(t) - L_{n-1}(t)) = n\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)^n - \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{n}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1} = -p\frac{d}{dp}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$$

il suit (cf. (5.61)) compte tenu de $f(t) = \bar{f}(p)$

$$\frac{d\bar{f}(p)}{dp} = \int_0^t f(u)\,du - tf(t); \qquad (12.42)$$

on a

$$n\,(L_n(t) = L_{n-1}(t)) = -p\left[\int_0^t L_n(u)\,du - tL_n(t)\right],$$

d'où il vient

$$n\,(L_n(t) - L_{n-1}(t)) = t\,\frac{dL_n(t)}{dt}. \tag{12.43}$$

Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle

$$tx''(t) + (1 - t)\,x'(t) + nx(t) = 0 \tag{12.44}$$

Pour le prouver, cherchons l'image de l'équation (12.44). Supposons que $x(t) = \overline{x}(p)$. On a

$$x'(t) = p\overline{x}(p) - px_0; \quad x''(t) = p^2\overline{x}(p) - p^2x_0 - px_1,$$

$$x_0 = x(0), \quad x_1 = x'(0),$$

$$tx'(t) = -p\,\frac{d}{dp}\left[\frac{p\overline{x}(p) - px_0}{p}\right] = -p\,\frac{d\overline{x}(p)}{dp},$$

$$tx''(t) = -p\,\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2\,\overline{x}(p) - p^2x_0 - px_1}{p}\right] = -p\,\frac{d}{dp}\,[p\overline{x}(p)] + px_0.$$

Donc (12.44) entraîne

$$-p\,\frac{d}{dp}\,[p\,\overline{x}(p)] + px_0 + p\overline{x}(p) - px_0 + p\,\frac{d\overline{x}}{dp} + n\overline{x}(p) = 0,$$

ou

$$p\,(1 - p)\,\frac{d\overline{x}(p)}{dp} + n\overline{x}(p) = 0. \tag{12.45}$$

Séparons les variables

$$\frac{d\overline{x}(p)}{\overline{x}(p)} = -n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)dp,$$

d'où

$$\ln\overline{x}(p) = -n\ln p + n\ln(1 - p) + \ln c$$

ou $\overline{x}(p) = c\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$, où c est une constante.

Donc $x(t) = cL_n(t)$ est solution de l'équation (12.44).

Soit m un entier tel que $m \in [0, n]$. Calculons l'intégrale

$$\int_0^\infty t^m L_n(t)\,e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^m\,\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{t^n e^{-t}}{n!}\right)dt \tag{12.46}$$

en se servant de (12.39). Une intégration par parties donne

$$\int_0^\infty t^m L_n(t)\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{t^m}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} - m \int_0^\infty t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right) dt.$$

Si $n = 0$, $L_0(t) = 1$ et l'intégrale (12.46) se calcule sans peine. Elle vaudra

$$\int_0^\infty t^{m-1} e^{-t}\, dt = m!$$

Supposons que $n > 0$. Alors $\lim\limits_{t \to 0} \frac{d^r}{dt^r} (t^n e^{-t}) = 0$ pour $r \in [0, n-1]$. Ceci s'établit aisément si l'on applique la formule de Leibnitz pour calculer la dérivée d'ordre r du produit $t^n e^{-t}$. De toute évidence,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{d^r}{dt^r} (t^n e^{-t}) = 0$$

et

$$\int_0^\infty t^m L_n(t)\, e^{-t}\, dt = -m \int_0^\infty t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t^n e^{-t}}{n!} \right) dt. \qquad (12.47)$$

D'où il suit

$$\int_0^\infty t^m L_n(t)\, e^{-t}\, dt = (-1)^m \frac{m!}{n!} \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (t^n e^{-t})\, dt,$$

donc

$$\int_0^\infty t_m L_n(t)\, e^{-t}\, dt = 0, \quad \text{si } m \in [0, n], \qquad (12.48)$$

et pour $m = n$

$$\int_0^\infty t^n L_n(t)\, e^{-t}\, dt = (-1)^n n! \qquad (12.49)$$

De (12.48) et (12.49) on déduit l'une des plus importantes propriétés des polynômes de Laguerre. Entre deux polynômes quelconques $L_n(t)$ et $L_k(t)$ on a les relations

$$\int_0^\infty L_n(t)\, L_k(t)\, e^{-t}\, dt = 0, \quad n \neq k, \qquad (12.50)$$

$$\int_0^\infty L_n^2(t)\, e^{-t}\, dt = 1. \qquad (12.51)$$

On sait que les égalités (12.50) et (12.51) traduisent le fait que la suite des polynômes de Laguerre

$$L_0(t) = 1,$$
$$L_1(t) = 1 - t,$$
$$L_2(t) = \frac{1}{2}(2 - 4t + t^2),$$
$$L_3(t) = \frac{1}{6}(6 - 18t + 9t^2 - t^3),$$
$$\dots$$

forme sur la section $t \in [0, \infty[$ un système orthonormé de poids $\rho(t) = e^{-t}$. (12.50) découle de (12.48). En effet, si $n \neq k$, sans nuire à la généralité on peut admettre que $k < n$. Or $L_k(t)$ est un polynôme de degré k, donc en vertu de (12.48) il vient

$$\int_0^\infty L_k(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0, \quad k < n$$

Pour prouver (12.51) on remarquera que la définition du polynôml $L_n(t)$ entraîne

$$L_n(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = \frac{(-1]^n}{p^n} + \dots \quad \frac{(-1)^n t^n}{n!} + Q_{n-1}(t),$$

où $Q_{n-1}(t)$ est un polynôme de degré inférieur à n. De (12.48) et (12.49), il vient

$$\int_0^\infty L_n(t) L_n(t) e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty t^n L_n(t) e^{-t} dt +$$
$$+ \int_0^\infty Q_{n-1}(t) L_n(t) e^{-t} dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty t^n L_n(t) e^{-t} dt = \frac{(-1)^n (-1)^n n!}{n!} = 1.$$

De la théorie générale des systèmes orthogonaux complets (cf. [27]) on sait que si

$$a_n = \int_0^\infty f(t) L_n(t) e^{-t} dt, \tag{12.52}$$

sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ et que celle-ci soit telle que

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t} dt < \infty, \tag{12.53}$$

alors la série

$$\sum_{n=0}^\infty a_n L_n(t) \tag{12.54}$$

converge en moyenne vers la fonction $f(t)$ avec un poids e^{-t}. Cela veut dire que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(t) \right|^2 e^{-t}\, dt = 0. \tag{12.55}$$

Moyennant certaines conditions supplémentaires (cf. [27]), on a la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t) = f(t). \tag{12.56}$$

Enfin de (12.55) et compte tenu de (12.50) et (12.51), il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t}\, dt, \tag{12.57}$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

Une généralisation de (12.57) est l'*égalité de Parseval*

$$\sum_{n=0} a_n b_n = \int_0^\infty f(t)\, g(t)\, e^{-t}\, dt, \tag{12.58}$$

où

$$b_n = \int_0^\infty g(t)\, L_n(t)\, e^{-t}\, dt; \qquad \int_0^\infty |g(t)|^2 e^{-t}\, dt < \infty.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ est absolument convergente. En effet, *l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski* entraîne

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2} < \infty.$$

Or les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ sont convergentes, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ l'est absolument. Les formules (12.56) et (12.52) peuvent être utilisées pour développer la fonction donnée $f(t)$ en série sur les polynômes de Laguerre.

A titre d'exemple cherchons le développement en série sur les polynômes de Laguerre de la fonction $f(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha > -\frac{1}{2}$. On a

$$a_n = \int_0^\infty e^{-\alpha t} L_n(t)\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty L_n(t)\, e^{-(1+\alpha)t}\, dt;$$

compte tenu de (12.37), il vient

$$a_n = \frac{1}{1+\alpha}\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)^n;$$

donc,

$$e^{-\alpha t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha}\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)^n L_n(t), \quad \alpha > -\frac{1}{2} \tag{12.59}$$

L'égalité (12.57) devient ici

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t - t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)^{2n}}{(1+\alpha)^2},$$

ou

$$\frac{1}{1+2\alpha} = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)^{2n}.$$

La véracité de cette égalité s'établit immédiatement. En effet, si dans (12.59) on pose $\lambda = 1 - \frac{1}{1+\alpha}$, on obtient

$$\frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{\lambda t}{1-\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n(t).$$

Autre exemple: cherchons le développement en série sur les polynômes de Laguerre de la fonction logarithmique

$$a_n = \int_0^{\infty} \ln t L_n(t)\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \ln t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\, dt.$$

Une intégration par parties pour $n > 0$ donne

$$a_n = -\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^{-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^n e^{-t})\, dt =$$

$$= -\frac{(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} \int_0^{\infty} t^{-n} t^n e^{-t}\, dt = -\frac{1}{n};$$

et pour $n = 0$

$$a_0 = \int_0^{\infty} \ln t e^{-t}\, dt = \Gamma'(1) = -C$$

$C = 0{,}057721\ldots$ est la constante d'Euler; donc,

$$\operatorname{Ln} t = -C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n}. \tag{12.60}$$

Pour développer $f(t)$ en série sur les polynômes de Laguerre, on peut se servir de l'image opérationnelle de ces derniers. L'idée de la méthode consiste à remplacer la fonction $f(t)$ par son image opérationnelle

$$f(t) = \overline{f}(p) \tag{12.61}$$

et à développer la fonction $\overline{f}(p)$ en série sur les puissances de $\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Si on obtient ce développement, i.e.

$$\overline{f}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1-\frac{1}{p}\right)^n, \tag{12.62}$$

en revenant à l'original on déduit le développement de

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(t).$$

Indiquons maintenant une méthode pour développer $f(t)$ en série sur les polynômes de Laguerre. La formule

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(1+\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} L_n(t)$$

entraîne pour $\mu = n$ (n est un entier)

$$\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} L_k(t).$$

Si désormais $f(t) = \overline{f}(p)$ et $\overline{f}(p)$ est un opérateur régulier, alors pour $|p| > \rho_0$

$$f(t) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=0} \frac{a_n t^n}{n!} \tag{12.63}$$

et la série de puissances converge pour tous les $t \in [0, \infty[$ (cf. § 7), donc,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} L_k(t). \tag{12.64}$$

Cette série peut être ramenée à la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Phi(n)(1)}{n!} L_n(t), \tag{12.65}$$

où $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et le rayon de convergence de la dernière série est supérieur à un, i.e. $\rho_0 > 1$. Cette réduction se réalise le plus aisément si (12.63) est mis sous la forme symbolique

$$\frac{t^n}{n!} = (1 - L(t))^n. \tag{12.66}$$

Pour calculer $(1 - L(t))^n$ avec la formule du binôme de Newton il faut remplacer $(L(t))^k$ par $L_k(t)$. Ceci posé, on peut mettre (12.64) sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{n} a_n (1 - L(t))^n = \Phi(1 - L(t)).$$

Par ailleurs, le second membre de (12.65) est égal à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Phi^{(n)}(1)}{n!} L_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-L(t))^n \Phi^{(n)}(1)}{n!}$$

d'où suit l'égalité (12.65). Dans les calculs on s'est servi de la formule de Maclaurin

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Supposons, par exemple, que $f(t) = I_0(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$ (cf. pt. 1) ; il vient

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t,$$

donc

$$\Phi^{(n)}(1) = e,$$

et de (12.65), il suit

$$I_0(2\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e}{n!} L_n(t). \tag{12.67}$$

Prouvons que les polynômes de Laguerre peuvent être mis sous la forme intégrale

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^n J_0(2\sqrt{t\xi})\, d\xi. \tag{12.68}$$

A cet effet, on remarquera que

$$J_0(2\sqrt{t\xi}) \risingdotseq e^{-\frac{\xi}{p}},$$

par conséquent, (cf. (12.38))

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\xi})\, \xi^n e^{-\xi}\, d\xi \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-\xi\left(1+\frac{1}{p}\right)} \xi^n\, d\xi =$$

$$= \frac{n!}{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+1}} = \frac{n!\, p^{n+1}}{(p+1)^{n+1}} \risingdotseq n!\, e^{-t} L_n(t). \quad \blacksquare$$

Pour clôre ce paragraphe, considérons les polynômes généralisés de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(t)$, $\alpha > -1$. Ces polynômes se déduisent à partir de la relation

$$t^\alpha L_n^{(\alpha)}(f) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{p^a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n. \qquad (12.69)$$

On a

$$\frac{1}{p^\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p^{k+\alpha}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^{k+\alpha}}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

donc,

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

Comme

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)\Gamma(1+\alpha),$$

on obtient

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-t)^k}{k!}. \qquad (12.70)$$

De (12.69) et compte tenu de (5.57), il résulte

$$e^{-t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{p}{(p+1)^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)^n.$$

ou

$$e^{-t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} \qquad (12.71)$$

L'égalité

$$\frac{p}{(p+a)^{\alpha+1}} = \frac{e^{-at} t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (12.72)$$

entraîne pour $\alpha > -1$

$$e^{-t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} p^n \frac{p}{(p+1)^{n+\alpha+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} p^n \frac{e^{-t} t^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^{n+\alpha}).$$

On a donc montré que

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t}). \qquad (12.73)$$

On montre que les polynômes généralisés de Laguerre sont des solutions particulières de l'équation différentielle du second ordre.

$$tx''(t) + (1 + \alpha - t)\,x'(t) + nx(t) = 0.$$

Cherchons la fonction génératrice des polynômes de Laguerre. A cet effet, multiplions les deux membres de (12.69) par λ^n, $|\lambda| < 1$ et sommons sur n entre 0 et ∞:

$$t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \lambda^n.$$

On remarquera que la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} z^n$$

se calcule sans peine. En effet,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} z^n = \Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{1\cdot 2 \ldots n} z^n =$$

$$= \Gamma(1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1-\alpha}{n} z^n = \Gamma(1+\alpha)(1-z)^{-1-\alpha},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \left[\lambda\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]^n = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\left[1 - \lambda\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]^{1+\alpha}} =$$

$$= \frac{p^{1+\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{(p - \lambda p + \lambda)^{1+\alpha}} = \frac{\Gamma(1+\alpha)\, p^{1+\alpha}}{(1-\lambda)^{1+\alpha}\left(p + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^{1+\alpha}};$$

et

$$t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\, p}{(1-\lambda)^{1+\alpha}\left[p + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right]^{1+\alpha}}.$$

L'égalité (12.72) entraîne

$$\frac{p}{\left[p + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right]^{1+\alpha}} = \frac{t^\alpha e^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

par conséquent,

$$t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{t^\alpha}{(1-\lambda)^{1+\alpha}} e^{-\frac{t\lambda}{1-\lambda}}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{e^{-\frac{t\lambda}{1-\lambda}}}{(1-\lambda)^{1+\alpha}}.$$

En utilisant l'expression des polynômes généralisés de Laguerre à l'aide de la fonction génératrice (cf. [27]), on s'assure immédiatement moyennant une intégration par parties que

$$\int_0^{\infty} t^k L_n^{(k)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^k \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t})\, dt = 0$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. D'où il suit (cf. (12.70))

$$\int_0^{\infty} L_m^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt = 0$$

pour $m \neq n$. On a donc prouvé l'orthogonalité des polynômes généralisés de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(t)$ sur la section $[0, \infty[$ avec un poids $\rho(t) = t^{\alpha} e^{-t}$, $\alpha > -1$.

Soit à calculer l'intégrale suivante pour $m = n$:

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt.$$

En remarquant que (cf. (12.70))

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n + \ldots,$$

et compte tenu de (12.75), il vient

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt\, ;$$

une n-uple intégration par parties donne, eu égard à (12.73),

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^{\infty} t^n \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t})\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\, ;$$

donc,

$$\int_0^{\infty} \{L_n^{(\alpha)}(t)\}^2\, t^{\alpha} e^{-t}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}. \qquad (12.75)$$

De la théorie générale de développement des fonctions en série sur des polynômes orthogonaux, on sait que si une fonction $f(t)$, $t \in [0, \infty[$, est telle que

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 t^\alpha e^{-t}\, dt < \infty$$

et le système de polynômes orthogonaux est complet, alors la série de Fourier sur ce système est

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(t), \tag{12.76}$$

où les coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{\int_0^\infty f(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^\alpha e^{-t}\, dt}{\int_0^\infty \{L_n^{(\alpha)}(t)\}^2\, t^\alpha\, dt}, \tag{12.77}$$

convergent en moyenne vers la fonction $f(t)$. Cela signifie que pour les sommes partielles

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n L_n^{(\alpha)}(t)$$

on a

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty |f(t) - S_N(t)|^2\, t^\alpha e^{-t}\, dt = 0. \tag{12.78}$$

Les polynômes généralisés de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ forment un système complet. Voir démonstration dans [27]. De (12.78) il résulte que si la série (12.76) est convergente au sens ordinaire, elle le sera vers la fonction $f(t)$ au point de continuité de cette dernière. Donc, moyennant quelques restrictions sur $f(t)$, restrictions que nous omettrons par manque de place (cf. [27]), on a le développement

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(t). \tag{12.79}$$

Si l'on pose

$$A_n = \int_0^\infty f(t)\, L_n^{(\alpha)}(t)\, t^\alpha e^{-t}\, dt, \tag{12.80}$$

il vient, de toute évidence (cf. (12.75)),

$$a_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} A_n;$$

et

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} A_n L_n^{(\alpha)}(t \tag{12.81}$$

Les polynômes $L_n^{(\alpha)}(t)$ peuvent être représentés par une intégrale de fonctions de Bessel par analogie à (12.68); plus exactement

$$e^{-t} t^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\, \xi^{n+\frac{\alpha}{2}} e^{-\xi}\, d\xi. \tag{12.82}$$

Pour démontrer (12.82), on se servira de l'égalité

$$\frac{e^{-\frac{\xi}{p}}}{p^\alpha}=\left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi}), \quad \alpha>-1. \tag{12.83}$$

Soit l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{n+\alpha} \frac{1}{p^\alpha} e^{-\frac{\xi}{p}} d\xi=t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\, d\xi. \tag{12.84}$$

On a

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{n+\alpha} \frac{1}{p^\alpha} e^{-\frac{\xi}{p}} d\xi=\frac{1}{p^\alpha} \int_0^{\infty} \xi^{n+\alpha} e^{-\xi\left(1+\frac{1}{p}\right)} d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{p^\alpha\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+\alpha+1}}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(p+1)^\alpha}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1},$$

et, en vertu de (12.71),

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{n+\alpha} \frac{1}{p^\alpha} e^{-\frac{\xi}{p}} d\xi=n!\, e^{-t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t).$$

La dernière égalité et (12.84) entraînent visiblement (12.82). Signalons encore une formule importante faisant intervenir les polynômes $L_n^{(\alpha)}(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n L_\alpha^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=e^\lambda (t\lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\lambda t}), \tag{12.85}$$

Pour la démontrer, multiplions les deux membres de (12.69) par $\frac{\lambda^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}$ et sommons sur n entre 0 et ∞:

$$t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=\frac{1}{p^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n\left(1-\frac{1}{p}\right)^n}{n!}=\frac{e^\lambda}{p^\alpha} e^{-\frac{\lambda}{p}}.$$

Cette égalité et (12.83) impliquent (12.85).

Pour $\alpha = 0$ il vient de (12.85)

$$e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n L_n(t)}{n!} = J_0(2\sqrt{\lambda t}). \tag{12.86}$$

Calculons pour l'exemple l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\xi})\, J_0(2\sqrt{t\eta})\, e^{-t}\, dt.$$

De (12.86) on a

$$J_0(2\sqrt{t\xi}) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n L_n(t)}{n!}, \quad J_0(2\sqrt{t\eta}) = e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n L_n(t)}{n!}.$$

En remplaçant les fonctions $J_0(2\sqrt{t\xi})$ et $J_0(2\sqrt{t\eta})$ par leurs développements en série sur les polynômes orthogonaux de Laguerre et en intégrant, on obtient

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\xi})\, J_0(2\sqrt{t\eta})\, e^{-t}\, dt = e^{-(\xi+\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi\eta)^n}{(n!)^2} = e^{-(\xi+\eta)} I_0(2\sqrt{\xi\eta});$$

donc

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\xi})\, J_0(2\sqrt{t\eta})\, e^{-t}\, dt = e^{-(\xi+\eta)} I_0(2\sqrt{\xi\eta}). \tag{12.87}$$

Si dans (12.80), on remplace $L_n^{(\alpha)}(t) t^{\alpha} e^{-t}$ par l'intégrale

$$L_n^{(\alpha)}(t)\, t^{\alpha} e^{-t} = \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{t\xi})\, \xi^{n+\frac{\alpha}{2}} e^{-\xi}\, d\xi,$$

alors

$$A_n = \int_0^{\infty} f(t)\, t^{\frac{\alpha}{2}}\, dt\, \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} J_{\alpha}(2\sqrt{t\xi})\, \xi^{n+\frac{\alpha}{2}} e^{-\xi}\, d\xi.$$

Supposons que

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, t^{\alpha/2}\, dt < \infty. \tag{12.88}$$

Dans l'intégrale double, on peut alors intervertir l'ordre d'intégration, et

$$A_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi} \xi^n}{n!}\, d\xi \int_0^{\infty} (\xi t)^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{t\xi})\, f(t)\, dt.$$

En effet, sous les hypothèses admises (cf. (12.88)), l'intégrale

$$F(\xi)=\int_0^\infty (\xi t)^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi}) f(t)\,dt \qquad (12.89)$$

converge absolument ; donc,

$$A_n=\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\xi^n}{n!} F(\xi)\,d\xi. \qquad (12.90)$$

De (12.81) et (12.85) on a formellement

$$f(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{n!\,L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)}=\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\xi^n L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)} F(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\xi}F(\xi)\sum_{n=0}^\infty \frac{\xi^n L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,d\xi=$$

$$=\int_0^\infty (t\xi)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi}) F(\xi)\,d\xi.$$

Si $f(t)$ vérifie la condition (12.88) et qu'au point t la série (12.81) converge, (12.89) entraînera

$$f(t)=\int_0^\infty (t\xi)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi}) F(\xi)\,d\xi \qquad (12.91)$$

sous réserve que

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\xi^n L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)} F(\xi)\,d\xi=\int_0^\infty e^{-\xi}F(\xi)\sum_{n=0}^\infty \frac{\xi^n L_n^{(\alpha)}(t)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,d\xi. \qquad (12.92)$$

On peut donner une forme plus symétrique à (12.89) et (12.91) en posant $f(t)\,t^{\frac{\alpha}{2}}=\varphi(t)$. On a alors

$$\Phi(\xi)=\xi^{-\frac{\alpha}{2}}F(\xi)=\int_0^\infty J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\,\varphi(t)\,dt$$

et de (12.91) on déduit

$$\varphi(t)=f(t)\,t^{\frac{\alpha}{2}}=\int_0^\infty \xi^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t\xi}) F(\xi)\,d\xi=\int_0^\infty \Phi(\xi) J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\,d\xi;$$

donc, si

$$\Phi(\xi)=\int_0^\infty \varphi(t) J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\,dt, \quad \alpha>-1, \qquad (12.93)$$

alors

$$\varphi(t)=\int_0^\infty \Phi(\xi)\,J_\alpha(2\sqrt{t\xi})\,d\xi. \tag{12.94}$$

Les transformations intégrales (12.93) et (12.94) appartiennent à une classe de transformations appelées *transformations de Fourier-Bessel.* Ces transformations sont très importantes en pratique. Les intégrales de Fourier-Bessel sont étudiées plus en détail dans [2]. Ici nous n'avons donné que la déduction formelle des formules (12.93) et (12.94) sans mentionner les conditions exactes que doit remplir la fonction $\varphi(t)$ pour que (12.93) et (12.94) aient lieu.

3. Relations fonctionnelles contenant quelques fonctions spéciales. Voyons des exemples d'application du calcul opérationnel à la déduction de quelques formules contenant des fonctions spéciales.

Soit

$$f(t)=\frac{t^\mu}{\Gamma(1+\mu)}=\frac{1}{p^\mu},$$

$$\frac{1}{p^\mu}=\left[1-\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]^\mu=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\binom{\mu}{n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n. \tag{12.95}$$

La série (12.95) est convergente pour $\left|1-\frac{1}{p}\right|<1$. Si l'on pose $p=\sigma+i\tau$, on obtient $\left|\frac{p-1}{p}\right|<1$ ou $(\sigma-1)^2+\tau^2<\sigma^2+\tau^2$, d'où $1-2\sigma<0$. Donc, lorsque $\operatorname{Re} p=\sigma>\frac{1}{2}$, la série (12.95) est convergente. De (12.95) il vient (cf. § 7, théorème 2)

$$\frac{t^\mu}{\Gamma(1+\mu)}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot2\ldots n}L_n(t). \tag{12.96}$$

En remplaçant μ par $s-1$, il vient

$$\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}=\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot2\ldots n}L_n(t). \tag{12.97}$$

On montre que la série (12.97) est convergente pour $t\in\,]0,\infty[$ et $\operatorname{Re} s>\frac{1}{2}$. On admettra que $\operatorname{Re} s>\frac{1}{2}$. Dans ce cas $f(t)=\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$ vérifie (12.53). La série (12.97) en la variable complexe s s'écrit:

$$\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot2\ldots n}a_n. \tag{12.98}$$

Les *séries* (12.98) sont appelées *séries d'interpolation de Newton.* En multipliant (12.97) par $f(t)\,e^{-t}$ et en intégrant entre 0 et ∞,

on obtient pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} f(t) e^{-t} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot 2\ldots n} a_n, \qquad (12.99)$$

où

$$a_n = \int_0^\infty f(t) L_n(t) e^{-t} dt, \qquad (12.100)$$

et la fonction $f(t)$ vérifie la condition (12.53). L'égalité (12.99) est un cas particulier de l'égilaté (12.100) lorsque $g(t) = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$, $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. En effet, $g(t)$ vérifie la condition (12.53) et

$$b_n = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{\Gamma(t)} L_n(t) e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-t} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^n e^{-t}}{n!}\right) dt.$$

Une intégration par parties (cf. (12.47)) donne

$$b_n = \frac{(-1)^n (s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{\Gamma(s)\, n!} \int_0^\infty t^{s-n-1+n} e^{-t} dt.$$

or

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \Gamma(s),$$

donc

$$b_n = (-1)^n \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Par conséquent, si la fonction $f(t)$ remplit la condition (12.53) la série (12.99) est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. On a ainsi démontré le

Théorème. *Si*

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} t^{s-1} f(t) e^{-t} dt$$

et

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 e^{-t} dt < \infty,$$

la fonction $\Phi(s)$ *se décompose dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ *en une série d'interpolation de Newton absolument convergente* (12.99).

Appliquons ce théorème à la décomposition de l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+e^t}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt.$$

On a ici

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

et

$$a_n = \int_0^\infty \frac{L_n(t)\, e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt = \int_0^\infty \frac{L_n(t)}{1+e^t}\, dt;$$

donc,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{1+e^t} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot 2\ldots n} \int_0^\infty \frac{L_n(t)}{1+e^t}\, dt,$$

$$\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, si $\operatorname{Re} s > 1$, alors

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}e^{-nt-t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^s} = \zeta(s)\,(1-2^{1-s}),$$

où

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

est la fonction dzéta de Riemann. Donc, pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$

$$(1-2^{1-s})\,\zeta(s) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n)}{1\cdot 2\ldots n} \int_0^\infty \frac{L_n(t)\, dt}{1+e^t}. \quad (12.101)$$

Autre exemple. Soit la fonction

$$f(t) = -\operatorname{Ei}(-t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

On a

$$\bar{f}(p) = \ln(1+p) \quad \text{(cf. 7.13))}$$

où

$$\ln(1+p) = \ln\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right] + \ln 2p.$$

Comme

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots,$$

il vient

$$\ln(1+p) = \ln 2p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n}{n2^n}.$$

En tenant compte de (12.37) et de

$$\ln p = \Psi(1) - \ln t = -C - \ln t,$$

on obtient, en définitive,

$$\ln(1+p) = \ln 2 - C - \ln t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{2^n n}$$

ou

$$-\operatorname{Ei}(-t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln 2 - C - \ln t - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{2^n n}. \quad (12.102)$$

Comme $L_n(0) = 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$, on peut mettre (12.102) sous la forme

$$-\operatorname{Ei}(-t) = -C - \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(0) - L_n(t)}{2^n n}. \quad (12.103)$$

Cette série est commode pour calculer les valeurs de la fonction $-\operatorname{Ei}(-t)$ pour de petites valeurs de t, $t > 0$.

Supposons maintenant que $f(t) = J_0(2\sqrt{t})$. Prenons le cas plus général, $f(t) = J_0(2\sqrt{\lambda t})$, où λ est un réel quelconque fixe.

On a

$$J_0(2\sqrt{\lambda t}) = e^{-\frac{\lambda}{p}}.$$

Ainsi,

$$J_0(2\sqrt{\lambda t}) = e^{-\frac{\lambda}{p}} = e^{\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\lambda^n}{n!},$$

d'où

$$J_0(2\sqrt{\lambda t}) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n L^n(t)}{n!}. \qquad (12.104)$$

A noter qu'en faisant $\lambda = -1$ dans la dernière égalité, on obtiendrait la formule (12.67).

Citons encore quelques exemples de déduction de formules contenant des polynômes de Laguerre, de Legendre et des fonctions de Bessel.

Exemple 1. Prouver l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n+1} = e^t\int_t^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du. \qquad (12.105)$$

De (12.59), on déduit par une intégration sur λ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n+1} = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\lambda t}{1-\lambda}\right)\frac{d\lambda}{1-\lambda}.$$

Posons $\frac{\lambda t}{1-\lambda} = u$ il vient $\lambda = \frac{u}{1+u}$; $d\lambda = \frac{du}{(1+u)^2}$ et $1-\lambda = \frac{1}{1+u}$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n+1} = \int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}}{1+u}\,du = e^t\int_t^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi.$$

Exemple 2. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,L_n(\xi) = e^{\xi}\delta(t-\xi).$$

La convergence de la série équivaut visiblement à la convergence opérationnelle.

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,L_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n L_n(\xi)$$

et $\left(\text{cf. (12.59), où il faut remplacer } \lambda \text{ par } 1-\frac{1}{p}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\,L_n(\xi) = pe^{-p\xi+\xi} = e^{\xi}\delta(t-\xi).$$

Exemple 3. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,L_n(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2(1-x)}}\,J_0\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right). \qquad (12.106)$$

où $P_n(x)$ sont des polynômes de Legendre.

On sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda x + x^2}}$$

en faisant $\lambda = 1 - \frac{1}{p}$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda x+\lambda^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2p^2\left(1-\frac{1}{p}\right)x + (p-1)^2}} =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{2p^2(1-x) - 2p(1-x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \cdot \frac{p}{\sqrt{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1+x}{4(1-x)}}}.$$

La relation

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} = J(\alpha t),$$

entraîne

$$e^{\beta t} J_0(\alpha t) = \frac{p}{p-\beta} \cdot \frac{p-\beta}{\sqrt{(p-\beta)^2+\alpha^2}} = \frac{p}{\sqrt{(p-\beta)^2+\alpha^2}}.$$

Donc, lorsque $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \cdot \frac{p}{\sqrt{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1+x}{4(1-x)}}} = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2(1-x)}} J_0\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1+x}{(1-x)}}\right).$$

Exemple 4. Montrer que

$$e^{-\frac{(t+\xi)}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)\, L_n(\xi)}{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} I_0\left(\frac{\xi}{2}\right) K_0\left(\frac{t}{2}\right) & \text{pour } \xi < t, \\ I_0\left(\frac{t}{2}\right) K_0\left(\frac{\xi}{2}\right) & \text{pour } \xi > t. \end{cases} \tag{12.107}$$

En appliquant l'égalité de Parseval aux polynômes $P_n(x)$ et eu égard à

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

il vient de (12.106)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)\, L_n(\xi)}{n+\frac{1}{2}} = \frac{e^{\frac{t+\xi}{2}+1}}{2} \int_{-1}^{+1} J_0\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) J_0\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \frac{dx}{1-x}.$$

Pour calculer la dernière intégrale posons $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=y$, d'où $x=\frac{y^2-1}{y^2+1}$, $1-x=\frac{2}{1+y^2}$ et $dx=\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$; et

$$\int_{-1}^{+1} J_0\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) J_0\left(\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\frac{dx}{1-x}=\int_0^\infty J_0\left(\frac{ty}{2}\right) J_0\left(\frac{\xi y}{2}\right)\frac{2y\,dy}{1+y^2}.$$

Or, on sait que la dernière intégrale (cf. [26] page 693) vaut $2I_0\left(\frac{\xi}{2}\right)K_0\times\times\left(\frac{t}{2}\right)$ lorsque $\xi<t$ et $2I_0\left(\frac{t}{2}\right)K_0\left(\frac{\xi}{2}\right)$ lorsque $\xi>t$. En particulier, (12.107) entraîne pour $\xi=0$ et $t=\xi$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n+\frac{1}{2}}=e^{\frac{t}{2}}K_0\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^2(t)}{n+\frac{1}{2}}=e^tI_0\left(\frac{t}{2}\right)K_0\left(\frac{t}{2}\right).$$

E x e m p l e 5. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nP_n(x)\,L_n(t)=\frac{\exp\left[\frac{t\lambda(\lambda-x)}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right]}{\sqrt{1-2\lambda x+\lambda^2}}J_0\left(\frac{t\lambda\sqrt{1-x^2}}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right) \quad (12.108)$$

pour $|\lambda|<1$.

On a la relation opérationnelle

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^nL_n(t)\,P_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]^nP_n(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2x\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right)+\lambda^2\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}}=\frac{p}{\sqrt{p^2-2\lambda xp(p-1)+\lambda^2(p-1)^2}}=$$

$$=\frac{p}{\sqrt{p^2(1-2\lambda x+\lambda^2)-2\lambda p(\lambda-x)+\lambda^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda x+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[p-\frac{\lambda(\lambda-x)}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right]^2+\frac{\lambda^2(1-2\lambda x+\lambda^2)-\lambda^2(1-x)^2}{(1-2\lambda x+\lambda^2)^2}}}=$$

$$=\frac{\exp\left(\frac{\lambda(\lambda-x}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right)}{\sqrt{1-2\lambda x+\lambda^2}}J_0\left(\frac{\lambda t(\sqrt{1-x^2})}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right).$$

Pour $\lambda=x$, il suit de (12.108) que

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^nP_n(x)\,L_n(t)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}J_0\left(\frac{tx}{\sqrt{1-x^2}}\right). \quad (12.109)$$

Exemple 6. Prouver que

$$\int_0^\infty K_0(t)\, L_n(t)\, e^{-t}\, dt = \int_0^1 \frac{x^{n+1} P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \qquad (12.110)$$

En multipliant (12.109) par $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et en intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(t) \int_0^1 \frac{x^{n+1} P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^1 J_0\left(\frac{tx}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{x\, dx}{1-x^2}.$$

Dans la dernière intégrale, en faisant le changement

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \xi,$$

d'où il vient

$$dx = \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad 1-x^2 = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

on obtient (cf. [26], page 692)

$$\int_0^1 J_0\left(\frac{tx}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{x\, dx}{1-x^2} = \int_0^\infty J_0(t\xi) \frac{\xi\, d\xi}{1+\xi^2} = K_0(t);$$

donc,

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(t) \int_0^1 \frac{x^{n+1} P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = K_0(t)$$

i.e. les coefficients de Fourier de la fonction $K_0(t)$ sur le système $L_0(t)$, $L_1(t), \ldots, L_n(t), \ldots$ sont déterminés par l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^{n+1} p_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

Exemple 7. Calculer la somme de la série

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n P_n(x)\, P_n(y), \quad |\lambda| < 1.$$

Dans (12.108), en appliquant l'égalité de Parseval aux polynômes de Laguerre, on trouve

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^{2n} P_n(x)\, P_n(y) = [(1-2\lambda x+\lambda^2)(1-2\lambda y+\lambda^2)]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\left[\left(\frac{\lambda(\lambda-x)}{1-2\lambda x+\lambda^2} + \frac{\lambda(\lambda-y)}{1-2\lambda y+\lambda^2} - 1\right) t\right] J_0\left(\frac{t\lambda\sqrt{1-x^2}}{1-2\lambda x+\lambda^2}\right) \times$$

$$\times J_0\left(\frac{t\lambda\sqrt{1-y^2}}{1-2\lambda y+\lambda^2}\right) dt.$$

Or, on sait que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) J_\nu(\gamma x)\, dx = \frac{1}{\gamma\beta} Q_{\nu-1}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}\right).$$

(cf. [26], page 723). Si $\nu = 0$ on a

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\eta) = 2e^{-\frac{\eta}{2}} K(e^{-\eta}),$$

ou en posant $\operatorname{ch}\eta = t$

$$Q_{-\frac{1}{2}}(t) = 2\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} K\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$$

où $K(t)$ est une intégrale elliptique complète du premier genre. En remplaçant λ^2 par λ, on obtient de toute évidence la solution cherchée.

Exemple 8. Montrer que

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{n+1} L_n(t) e^{-t}}{n+1} = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\frac{t}{1-\lambda}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du. \tag{12.111}$$

pour $t > 0$ et $|\lambda| < 1$.

On a la relation opérationnelle

$$L_n(t) e^{-t} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1},$$

donc

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{n+1} L_n(t) e^{-t}}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{\lambda p}{p+1}\right) = \ln(1+p) - \ln(1+(1-\lambda)p) =$$

$$= -\operatorname{Ei}(t) + \operatorname{Ei}\left(\frac{t}{1-\lambda}\right) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\frac{t}{1-\lambda}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Exemple 9. Trouver la somme de la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(t) L_n(\xi)}{n+1}$.

De (12.111) il suit

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n L_n(\xi) e^{-\xi}}{n+1} = \frac{1}{\lambda} \int_\xi^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \frac{1}{\lambda} \int_\xi^\infty e^{-\frac{u}{1-\lambda}} \frac{du}{u}, \qquad |\lambda| < 1.$$

En substituant $1-\frac{1}{p}$ à λ, on obtient $\frac{1}{\lambda} = \frac{p}{p-1} = e^t$, $\frac{p}{p-1} e^{-pu} = e^t \eta(t-u)$, donc

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(t) L_n(\xi) e^{-\xi}}{n+1} = e^t \int_\xi^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - e^t \int_\xi^\infty \frac{e^{-u}}{u} \eta(t-u)\, du,$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)\,L_n(\xi)}{n+1} = \begin{cases} e^{t+\xi} \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du & \text{pour } t < \xi, \\ e^{t+\xi} \displaystyle\int_{t}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du & \text{pour } t > \xi. \end{cases} \tag{12.112}$$

E x e m p l e 10. Montrer que

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\xi})\,\xi^n e^{-p\xi}\,d\xi = \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} \frac{L_n(\xi)\,e^{-\xi}\,d\xi}{1+p\xi}, \tag{12.113}$$

pour $\operatorname{Re} p > 0$.

On sait que

$$2K_0(2\sqrt{\xi}) = \int_0^{\infty} e^{-t-\frac{\xi}{t}}\,\frac{dt}{t},$$

par conséquent,

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\xi})\,\xi^n e^{-p\xi}\,d\xi = \int_0^{\infty} e^{-t}\frac{dt}{t} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi}{t}-p\xi}\,\xi^n\,d\xi =$$

$$= n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\left(p+\frac{1}{t}\right)^{n+1}}\,\frac{dt}{t} = n! \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+pt)^n}\,dt.$$

En intégrant n fois par parties, on obtient

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\xi})\,\xi^n e^{-p\xi}\,d\xi = \frac{1}{p^n} \int_0^{\infty} \frac{\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})}{1+pt}\,dt = \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} \frac{L_n(t)\,e^{-t}}{1+pt}\,dt.$$

De (12.113), on déduit la formule plus générale:

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\lambda\xi})\,\xi^n e^{-p\xi}\,d\xi = \frac{n!}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{L_n\left(\frac{\xi}{p}\right) e^{-\frac{\xi}{p}}\,d\xi}{\lambda+\xi}. \tag{12.114}$$

E x e m p l e 11. Prouver la formule

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n K_0(2\sqrt{t\lambda})\right) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} \frac{(t\lambda)^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!} K_{\nu}(2\sqrt{t\lambda}). \tag{12.115}$$

De (12.114) il vient

$$\frac{2}{n!}\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\lambda\xi})\,\xi^n p^{n+1} e^{-p\xi}\,d\xi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^{\infty} \frac{\xi^k e^{-\frac{\xi}{p}}\,d\xi}{p^k k!\,(\lambda+\xi)},$$

or

$$\frac{1}{p^k} e^{-\frac{\xi}{p}} = \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{k}{2}} J_k(2\sqrt{t\xi}) \text{ et } p^{n+1}e^{-p\xi} = \delta^{(n)}(t-\xi).$$

D'autre part, la fonction $f(\xi) = K_0(2\sqrt{\lambda\xi})\,\xi^n$ est telle que $f(0) = f'(0) = \ldots$ $\ldots = f^{n-1}(0) = 0$, donc (cf. [10], formule (16.19), page 174)

$$\frac{2}{n!}\int_0^\infty K_0(2\sqrt{\lambda\xi})\,\xi^n\delta^n(t-\xi)\,d\xi = \frac{2}{n!}\frac{d^n}{dt^n}[K_0(2\sqrt{\lambda t})\,t^n].$$

Par ailleurs,

$$\int_0^\infty \frac{\xi^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{\xi t})\,d\xi}{\lambda+\xi} = 2\lambda^{\frac{\nu}{2}} K_{\frac{\nu}{2}}(2\sqrt{t\lambda}),$$

donc

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}[t^n K_0(2\sqrt{t\lambda})] = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{(t\lambda)^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!}K_\nu(2\sqrt{t\lambda}).$$

Exemple 12. Soit $M_n = L_n\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{t^k}{(k!)^2}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{1+\xi}\right)^n M_n(t) = (1+\xi)\,J_0(2\sqrt{t\xi}),$$

où $\xi > 0$.

Dans (12.105), en remplaçant t par $\frac{1}{p}$ et λ par $\frac{\xi}{1+\xi}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{1+\xi}\right)^n M_n(t) = \frac{1}{1-\frac{\xi}{1+\xi}} e^{-\frac{\xi}{(1+\xi)\left(1-\frac{\xi}{1+\xi}\right)p}} = (1+\xi)\,e^{-\frac{\xi}{p}},$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{(1+\xi)^{n+1}} M_n(t) = J_0(2\sqrt{t\xi}).$$

Exemple 13. Montrer que

$$\left(\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t} = (-1)^n n!\,L_n(t)\,e^{-t}. \qquad (12.116)$$

Remarque. Il est évident que

$$\left(\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}\right)^n e^{-\lambda t} = \lambda^n(-1)^n n!\,L_n(\lambda t)\,e^{-\lambda t}.$$

Cette égalité est évidente pour $n = 0$. Supposons qu'elle est valable pour un certain n et prouvons qu'elle l'est pour $n + 1$. Supposons que $\overline{f}(p) = f(t)$ et $B = \frac{dt}{t} t \frac{dt}{t}$. Moyennant des restrictions adéquates sur $f(t)$, on obtient.

$$p \int_0^\infty Bf(t) e^{-pt} dt = p \int_0^\infty \frac{d}{dt} (tf'(t)) e^{-pt} dt = p^2 \int_0^\infty tf'(t) e^{-pt} dt =$$

$$= -p^2 \frac{d}{dp} \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = -p^2 \frac{d}{dp} \left[-f(0) + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right] = -p^2 \frac{d}{dp} \overline{f}(p).$$

d'où

$$Bf(t) = -p^2 \frac{d\overline{f}(p)}{dp}. \tag{12.117}$$

En faisant $f(t) = (-1)^n L_n(t) e^{-t} n!$ dans (12.117) et eu égard à $L_n(t) e^{-t} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1}$, il vient

$$B[(-1)^n n! L_n(t) e^{-t}] = -(-1)^n n! p^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} =$$

$$= (-1)^{n+1} (n+1)! \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+2} = (-1)^n (n+1)! L_{n+1}(t) e^{-t};$$

donc

$$B[B^n e^t] = (-1)^{n+1} (n+1)! L_{n+1}(t) e^{-t}.$$

Exemple 14. Montrer que l'image de la fonction $t^n L_n(t)$ est $\frac{n!}{p^n} P_n^*\left(\frac{1}{p}\right)$, où $P_n^*(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n (1-x)^n]$.

On a la relation opérationnelle

$$L_n(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$$

qui entraîne

$$\frac{1}{n!} (-t)^n L_n(t) = p \frac{d^n}{dp^n} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p^{k+1}} \right\} =$$

$$= p \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \frac{(-1)^n}{p^{k+1+n}}.$$

D'un autre côté,

$$P_n^*(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{k+n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} x^k;$$

donc,

$$\frac{1}{n!} t^n L_n(t) = \frac{1}{p^n} P_n^*\left(\frac{1}{p}\right). \tag{12.118}$$

Si l'on introduit les polynômes de Legendre $P_n(x)$, il est aisé de voir que

$$(-1)^n P_n(2x-1) = P_n^*(x)$$

et

$$(-1)^n t^n L_n(t) = \frac{n!}{p^n} P_n\left(\frac{2}{p}-1\right). \tag{12.119}$$

Exemple 15. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} L_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{t^k}{(n-k)!} L_n^{(k)}(t), \tag{12.120}$$

où $L_n^{(k)} = \frac{d}{dt^k} L_n$.

De (12.118) il vient

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n L_n(t)) = P_n^*\left(1-\frac{1}{p}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \left(1-\frac{1}{p}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} L_k(t). \tag{12.121}$$

Le calcul du premier membre nous fournit la solution cherchée.

Exemple 16. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} L_k(t) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \frac{t^k}{k!}. \tag{12.122}$$

Cette identité découle immédiatement de la suivante

$$P_n^*\left(1-\frac{1}{p}\right) = (-1)^n P_n^*\left(\frac{1}{p}\right). \tag{12.123}$$

Exemple 17. Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n(t) P_n^*(x).$$

On se servira des formules

$$(-1)^n P_n(2x-1) = P_n^*(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(x) = (1-2\lambda x+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n^*(x) = (1+2\lambda(2x-1)+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2\lambda+\lambda^2+4\lambda x)^{-\frac{1}{2}};$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n(t)\, P_n^*(x) = \left[1 - 2\lambda\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \lambda^2\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 + 4x\lambda\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= p\,(p^2 - 2\lambda p^2 + 2\lambda p + \lambda^2 p^2 - 2\lambda^2 p + \lambda^2 + 4x\lambda p^2 - 4x\lambda p)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= p\,[p^2\,(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4x\lambda) + 2p\,(\lambda - \lambda^2 - 2\lambda x) + \lambda^2]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= p\,(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4x\lambda)^{-\frac{1}{2}}\left(p^2 + 2p\,\frac{\lambda - \lambda^2 - 2x\lambda}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x} + \frac{\lambda^2}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= p\,(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(p + \frac{\lambda - \lambda^2 - 2x\lambda}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda y}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2\,(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x) - (\lambda - \lambda^2 - 2\lambda x)^2}{(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= p\,(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(p + \frac{\lambda - \lambda^2 - 2x\lambda}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{4\lambda^2 x\,(1 - x)}{(1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

d'où il suit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_n(t)\, P_n^*(x) =$$

$$= (1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{t(\lambda - \lambda^2 - 2x\lambda)}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x}}\, J_0\left(\frac{2\lambda t\sqrt{x\,(1 - x)}}{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4\lambda x}\right). \qquad (12.124)$$

E x e m p l e 18. Calculer l'intégrale

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\xi})\,\frac{\xi^n}{(n\,!)^2}\,J_0(2\sqrt{\xi\,t})\,d\xi.$$

De (12.113), il vient (cf. exemple 10)

$$2\int_0^{\infty} K_0(2\sqrt{\xi})\,\xi^n e^{-\frac{\xi}{p}}\,d\xi = n\,!\,p^n \int_0^{\infty} \frac{L_n(\xi)\,p}{p + \xi}\,e^{-\xi}\,d\xi,$$

ou

$$2\int_0^\infty K_0(2\sqrt{\xi})\,\xi^n J_0(2\sqrt{t\xi})\,d\xi = n!\,p^n\int_0^\infty L_n(\xi)\,e^{-\xi(t+1)}\,d\xi =$$

$$= p^n n!\,\frac{1}{t+1}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^n = n!\,\frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{t+1}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^n\right] =$$

$$= n!\,\frac{d^n}{dt^n}\,\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{1+t}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(1+t)^{k+1}},$$

donc

$$\frac{d^n}{dt^n}\,\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)(-1)^n}{(1+t)^{n+k+1}} =$$

$$= n!\,(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(1+t)^{n+k+1}};$$

or

$$P_n^*(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(1-x)^n\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}x^k,$$

donc

$$2\int_0^\infty K_0(2\sqrt{\xi})\,\frac{\xi^n}{(n!)^2}\,J_0(2\sqrt{\xi t})\,d\xi = \frac{(-1)^n}{(1+t)^{n+1}}\,P_n^*\left(\frac{1}{1+t}\right). \qquad (12.125)$$

CHAPITRE IV

CALCUL OPÉRATIONNEL À DEUX VARIABLES

§ 13. L'intégrale de Laplace à deux dimensions et ses propriétés fondamentales

1. Intégrale de Laplace à deux dimensions. Les propriétés fondamentales de l'intégrale de Laplace à deux dimensions présentent de nombreux points communs avec celles de l'intégrale à une dimension. D'autre part, l'intégrale de Laplace à deux dimensions, autant que le calcul opérationnel à deux variables, possèdent de nombreux traits spécifiques que l'on ne retrouve pas dans le cas unidimensionnel. Considérons une intégrale de Laplace à deux dimensions et énonçons ses propriétés fondamentales dans le but de justifier le calcul opérationnel à deux variables. L'intégrale

$$F(p, q) = \mathscr{L}_{p, q}\{f(x, y)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (13.1)$$

où $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + i\nu$ sont des paramètres complexes, s'appelle *intégrale à deux dimensions* ou *transformée de Laplace*. La relation inverse de (13.1) sera notée

$$f(x, y) = \mathscr{L}_{x, y}^{-1}\{F(p, q)\}. \qquad (13.2)$$

L'intégrale (13.1) est *absolument convergente* si existe la limite

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_0^a \int_0^b | e^{-px-qy} f(x, y) |\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma x-\tau y} | f(x, y) |\, dx\, dy, \quad (13.3)$$

où $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Re} q = \tau$. Dans la suite on supposera l'existence de nombres réels σ et τ, tels que (13.3) soit convergente. L'hypothèse de la convergence de (13.1) facilite grandement l'exposé pour la raison suivante. Par analogie avec le cas unidimensionnel (cf. § 2), on aurait pu penser que si l'intégrale (13.1) est convergente pour un certain couple de valeurs des paramètres p_0 et q_0 elle le sera pour tous les $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, $\operatorname{Re} q > \tau_0$. Mais ceci n'a pas lieu pour une intégrale de Laplace à deux dimensions comme le montre l'exemple suivant.

Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, 2],\ y \in [0, 2] \text{ et pour } x \geqslant 2,\ y \geqslant 2, \\ e^{x^2} & \text{pour } x \in]2, \infty],\ y \in [0, 1[, \\ -e^{x^2} & \text{pour } x \in]2, \infty[,\ y \in [1, 2[, \\ e^{y^2} & \text{pour } x \in [0, 1[,\ y \in]2, \infty[, \\ -e^{y^2} & \text{pour } x \in [1, 2[,\ y \in]2, \infty[. \end{cases}$$

Pour $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, on a

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = 0, \quad \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

i.e. existe $F(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, on a

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a \int_0^b e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_2^a e^{-px}\, dx \left[e^{x^2} \int_0^1 e^{-qy}\, dy - e^{x^2} \int_1^2 e^{-qy}\, dy \right] +$$

$$+ \int_2^b e^{-qy}\, dy \left[e^{y^2} \int_0^1 e^{-px}\, dx - e^{y^2} \int_1^2 e^{-px}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{q}(1 - e^{-q})^2 \int_2^a e^{-px+x^2}\, dx + \frac{1}{p}(1 - e^{-p})^2 \int_2^b e^{-qy+y^2}\, dy,$$

d'où il suit que si p et q ne sont pas simultanément nuls, $\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} F(p, q; a, b)$ n'existe pas. La propriété 3 de l'intégrale de Laplace (cf. § 2) ne se généralise pas au cas bidimensionnel, car la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

entraîne que les intégrales partielles $\int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt$ sont bornées quel que soit $T \geqslant 0$, alors que la convergence ordinaire de l'intégrale (13.1) n'implique pas la limitation des intégrales partielles

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a \int_0^b e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{13.4}$$

quels que soient $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Pour que les propriétés de la transformation de Laplace à une dimension se transposent au cas bidimensionnel, il est nécessaire d'exiger que pour un couple au moins de valeurs des paramètres p et q (dans la suite nous la désignerons par le point (p, q)) soient réalisées les conditions suivantes :

1) l'intégrale (13.4) est bornée au point (p, q) par rapport aux variables $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, i.e.

$$|F(p, q; a, b)| < M(p, q)$$

pour tous les $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, où $M(p, q)$ est une constante positive ne dépendant ni de a ni de b;

2) au point (p, q) existe la

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} F(p, q; a, b) = F(p, q).$$

Si les conditions 1) et 2) sont remplies simultanément, on dit que l'intégrale de Laplace (13.1) est à convergence bornée au point (p, q). Si l'on admet la convergence absolue de l'intégrale (13.1), il n'est pas indispensable d'introduire la notion de convergence bornée puisque la première inclut automatiquement la seconde. En effet,

$$\left| \int_0^a \int_0^b e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \int_0^a \int_0^b |e^{-px-qy} f(x, y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-px-qy} f(x, y)|\, dx\, dy.$$

Les propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions à convergence bornée sont énoncées dans l'ouvrage [9].

Théorème 1. *Si l'intégrale* (13.1) *est absolument convergente au point* (p_0, q_0), *elle le sera en tous les points* (p, q) *tels que* $\operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant 0$, $\operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant 0$.

Démonstration. Par hypothèse, l'intégrale (13.1) converge absolument pour $p = p_0$ et $q = q_0$, donc, l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-p_0x-q_0y} f(x, y)|\, dx\, dy < \infty,$$

ou

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma_0x-\tau_0y} |f(x, y)|\, dx\, dy < \infty.$$

Supposons que

$$\operatorname{Re}(p-p_0) = \sigma - \sigma_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(q-q_0) = \tau - \tau_0 \geqslant 0,$$

il vient

$$\int_0^a \int_0^b | e^{-px-qy} f(x, y) | \, dx\, dy = \int_0^a \int_0^b e^{-\sigma x-\tau y} | f(x, y) | \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^a \int_0^b e^{-(\sigma-\sigma_0)x-(\tau-\tau_0)y} e^{-\sigma_0 x-\tau_0 y} | f(x, y) | \, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^a \int_0^b e^{-\sigma_0 x-\tau_0 y} | f(x, y) | \, dx\, dy \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma_0 x-\tau_0 y} | f(x, y) | \, dx\, dy < \infty.$$

D'où suit la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty | e^{-px-qy} f(x, y) | \, dx\, dy \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma_0 x-\tau_0 y} | f(x, y) | \, dx\, dy. \quad \blacksquare$$

Théorème 2. *Si une fonction $f(x, y)$ est telle que*

$$| f(x, y) | \leqslant M e^{hx+ky}$$

quels que soient $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, où M, h et k sont des constantes positives, l'intégrale de Laplace (13.1) *est absolument convergente en tous les points (p, q) tels que* $\operatorname{Re} p > h$, $\operatorname{Re} q > k$ *et l'on a*

$$| F(p, q) | \leqslant \frac{M}{(\sigma-h)(\tau-k)},$$

où $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Re} q = \tau$. En effet,

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} (x, y) \, dx\, dy \right| \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty | e^{-(\sigma+i\mu)x-(\tau+i\nu)y} f(x, y) | \, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty M e^{-\sigma x-\tau y} e^{hx+ky} \, dx\, dy = \frac{M}{(\sigma-h)(\tau-k)}. \quad \blacksquare$$

D o m a i n e d e c o n v e r g e n c e. Le domaine de convergence ne peut plus être représenté de façon aussi suggestive que dans le cas unidimensionnel. On remarquera que la convergence ou la divergence de l'intégrale (13.1) pour toutes les valeurs réelles de (p, q) entraîne respectivement la convergence ou la divergence pour toutes les valeurs complexes de (p, q). Ceci posé on ne considérera que des valeurs réelles de p et q. En vertu du théorème 1, si l'intégrale (13.1) est absolument convergente pour $\sigma = \sigma_0$, $\tau = \tau_0$, elle le sera dans le domaine $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\tau \geqslant \tau_0$. L'ensemble D de tous les points (σ, τ) en lesquels l'intégrale (13.1) est absolument con-

vergente s'appelle naturellement *domaine de convergence absolue* de l'intégrale (13.1).

Considérons dans le $\sigma\tau$-plan des variables réelles (fig. 55) la famille de droites

$$\tau = \sigma + \lambda, \quad \lambda \in]-\infty, \infty[,$$

où λ est un réel. Choisissons dans cette famille la droite qui correspond à $\lambda = \lambda_0$ et repérons sur elle les points de convergence et de divergence de l'intégrale (13.1). En vertu du théorème 1, pour toute valeur fixe $\lambda = \lambda_0$, il existe une valeur finie $\sigma_0 = \sigma(\lambda_0)$ telle que l'intégrale (13.1) est convergente pour tous les $\sigma > \sigma_0$ et $\tau = \sigma + \lambda_0$ et divergente pour $\sigma < \sigma_0$, $\tau = \sigma + \lambda_0$. En faisant varier λ on obtient dans le $\sigma\tau$-plan un ensemble de points (α) défini par les équations paramétriques

$$\begin{cases} \sigma = \sigma(\lambda), \\ \tau = \sigma(\lambda) + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in]-\infty, \infty[).$$

Fig. 55

On démontre [9] que l'ensemble des points (α) est une courbe continue non croissante qui partage le $\sigma\tau$-plan en deux régions: l'une, D_1, définie par

$$\begin{cases} \sigma > \sigma(\lambda), \\ \tau = \sigma(\lambda) + \lambda, \end{cases} \quad (\lambda \in]-\infty, \infty[),$$

l'autre, D_2, par

$$\begin{cases} \sigma < \sigma(\lambda), \\ \tau = \sigma(\lambda) + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in]-\infty, \infty[).$$

L'intégrale (13.1) est convergente dans D_1 et divergente dans D_2. Sur la courbe α elle est soit convergente soit divergente. La courbe continue non croissante α s'appelle *caractéristique de convergence* de l'intégrale de Laplace. Pour p, q complexes, on considère un domaine D composé de points (p, q) tels que $\operatorname{Re} p$ et $\operatorname{Re} q$ appartiennent à D_1. Si l'intégrale (13.1) est convergente sur la caractéristique de convergence (α), on rapporte à l'ensemble D les points (p, q) pour lesquels $\operatorname{Re} p$ et $\operatorname{Re} q$ sont situés sur cette caractéristique.

Trois cas sont donc possibles:

1) l'intégrale (13.1) est convergente sur le plan réel tout entier;

2) l'intégrale (13.1) n'est nulle part convergente;

3) l'intégrale (13.1) converge à l'intérieur et diverge à l'extérieur d'un domaine fermé ou ouvert.

Exhibons quelques exemples.

1) $f(x, y) = e^{ax+by}$ (a et b sont des réels). Il vient

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(p-a)-y(q-b)}\, dx\, dy.$$

Cette intégrale est absolument convergente pour $\operatorname{Re} p = \sigma > a$, $\operatorname{Re} q = \tau > b$. La frontière du domaine de convergence est composée

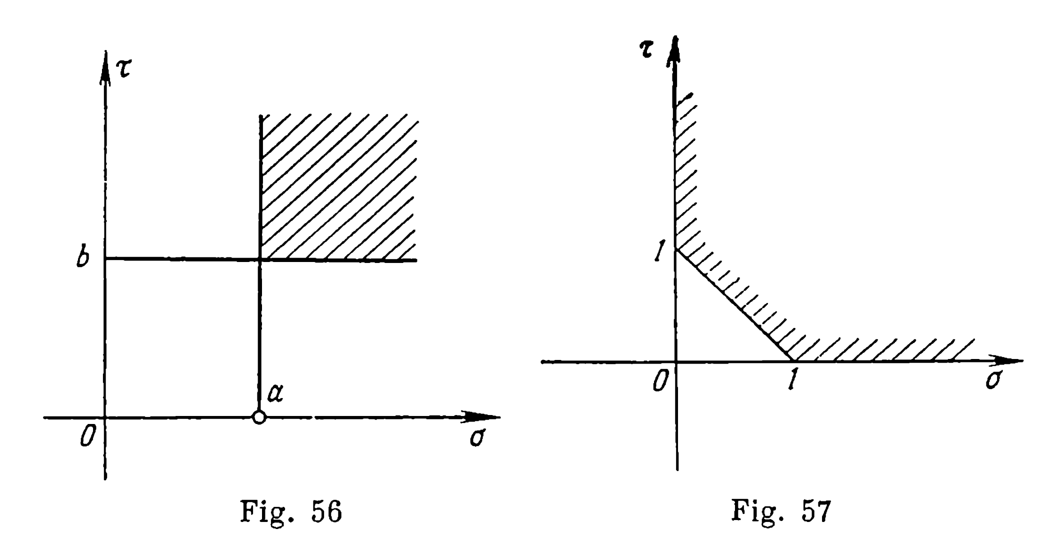


Fig. 56 Fig. 57

des droites $\sigma = a$, $\tau = b$ (fig. 56).

2) $f(x, y) = \begin{cases} e^{ax} & \text{pour } x < y, \\ e^{ay} & \text{pour } x > y, \end{cases}$

où a est réel. On a

$$F(\sigma, \tau) = \int_0^\infty e^{-\tau y}\, dy \int_0^y e^{-\sigma x + ax}\, dx + \int_0^\infty e^{-\sigma x}\, dx \int_x^\infty e^{-\tau y + ay}\, dy =$$

$$= \frac{\sigma + \tau}{\sigma\tau(\sigma + \tau - a)}.$$

Le domaine de convergence est représenté sur la figure 57 ($a = 1$).

3) $f(x, y) = I_0(2\sqrt{xy})$. On a

$$F(\sigma, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma x - \tau y} I_0(2\sqrt{xy})\, dx\, dy. \tag{13.5}$$

Comme

$$\int_0^\infty I_0(2\sqrt{\lambda t})\, e^{-\sigma t}\, dt = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{\lambda}{\sigma}},$$

on déduit

$$F(\sigma, \tau) = \int_0^\infty e^{-\tau y} \frac{1}{\sigma} e^{\frac{y}{\sigma}}\, dy = \frac{1}{\sigma\left(\tau - \frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{1}{\sigma\tau - 1}.$$

Le domaine de convergence est limité par l'hyperbole $\sigma\tau = 1$ (fig. 58).

2. Propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions. Nous ne nous étendrons pas sur les propriétés de l'intégrale de Laplace à deux dimensions, celles-ci peuvent être déduites par analogie avec l'intégrale à une dimension. Nous nous limiterons aux résultats

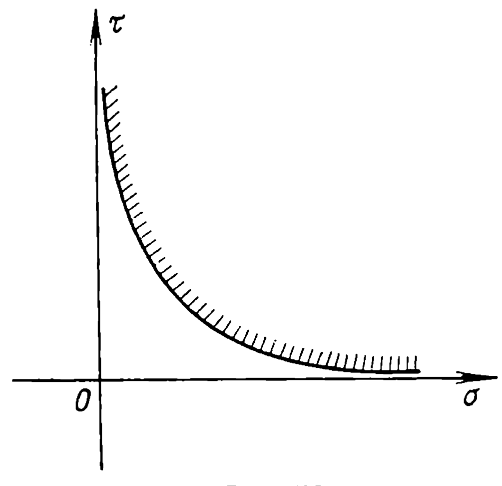


Fig. 58

finaux suivants. La définition de l'intégrale (13.1) entraîne aussitôt les propriétés suivantes:

$$\mathcal{L}_{p,q}\{f(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{\alpha\beta} F\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right), \tag{13.6}$$

$$\mathcal{L}_{p,q}\{e^{-\alpha x-\beta y} f(x, y)\} = F(p+\alpha, q+\beta), \tag{13.7}$$

où α et β sont des nombres complexes quelconques. Dans les deux cas p et q sont choisis tels que l'intégrale de Laplace converge. Par ailleurs,

$$\mathcal{L}^{-1}_{x,y}\{e^{-\alpha p-\beta q}F(p, q)\} = \\ = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, \alpha[\text{ ou } y \in [0, \beta[, \\ f(x-\alpha, y-\beta) & \text{pour } x > \alpha, \ y > \beta, \end{cases} \tag{13.8}$$

α et β sont supposés réels et positifs.

Le produit de convolution de deux fonctions se définit comme suit

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x-\xi, \quad y-\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{13.9}$$

Si l'intégrale (13.1) est absolument convergente, la propriété fondamentale du produit de convolution a lieu, i.e.

$$\mathcal{L}_{p,q}\{f_1(x, y)\}\, \mathcal{L}_{p,q}\{f_2(x, y)\} = \mathcal{L}_{p,q}\{f(x, y)\}. \tag{13.10}$$

Enonçons encore une propriété reliant une fonction de deux variables $f(x, y)$ et une fonction d'une variable $g(t)$ avec leurs

transformées de Laplace:

$$F(p,q) = \mathcal{L}_{p,q}\{f(x,y)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

$$G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} g(t)\,dt$$

les intégrales sont absolument convergentes:

$$\mathcal{L}_{xy}^{-1}\{G(p+q)F(p,q)\} = \int_0^{\min(x,y)} g(u)\,f(x-u,\,y-u)\,du. \qquad (13.11)$$

L'intégration est effectuée sur u entre 0 et la plus petite des deux valeurs (réelles et positives) de x et y. Soit l'expression

$$\mathcal{L}_{p,q} = \left\{ \int_0^{\min(x,y)} g(u)\,f(x-u,\,y-u)\,du \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{\min(x,y)} e^{-px-qy} g(u)\,f(x-u,\,y-u)\,dx\,dy\,du. \qquad (13.12)$$

Comme u, $x - u$ et $y - u$ ne prennent que des valeurs positives dans le domaine d'intégration et que l'intégrale triple (13.12) est absolument convergente, le changement de variables $\xi = x - u$, $\eta = y - u$, donne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{\min(x,y)} e^{-px-qy} g(u)\,f(x-u,\,y-u)\,dx\,dy\,du =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p\xi-q\eta-(p+q)u} g(u)\,f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,du = G(p+q)\,F(p,q).$$

En intégrant par parties, on trouve les transformées de Laplace des dérivées

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f'_x(x,y)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-qy} \left\{ e^{-px} f(x,y) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + p \int_0^\infty e^{-px} f(x,y)\,dx \right\} dy =$$

$$= pF(p,q) - \int_0^\infty e^{-qy} f(0,y)\,dy, \qquad (13.13)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f'_y(x, y)\,dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} \left\{ e^{-qy} f(x, y) \Big|_{y=0}^{y=\infty} + q \int_0^\infty e^{-qy} f(x, y)\,dy \right\} dx =$$

$$= qF(p, q) - \int_0^\infty e^{-px} f(x, 0)\,dx, \qquad (13.14)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f''_{xy}(x, y)\,dy = pqF(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-px} f'_x(x, 0)\,dx - \int_0^\infty e^{-qy} f'_y(0, y)\,dy - f(0, 0), \qquad (13.15)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f''_{yy}(x, y)\,dy =$$

$$= q^2 F(p, q) - \int_0^\infty e^{-px} \{qf(x, 0) + f'_y(x, 0)\}\,dx, \qquad (13.16)$$

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f''_{xx}(x, y)\,dx =$$

$$= p^2 F(p, q) - \int_0^\infty e^{-qy} \{pf(0, y) + f'_x(0, y)\}\,dy, \qquad (13.17)$$

. . . .

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f^{(n)}_{x^n}(x, y)\,dx = p^n F(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-qy} \{p^{n-1} f(0, y) + p^{n-2} f'_x(0, y) + \ldots + f^{(n-1)}_{x^{n-1}}(0, y)\}\,dy =$$

$$= p^n F(p, q) - \int_0^\infty e^{-qy} \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}_{x^k}(0, y)\,dy, \qquad (13.18)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f^{(m)}_{y^m}(x, y)\,dy = q^m F(p, q) -$$

$$-\int_0^\infty e^{-px}\{q^{m-1}f(x,0)+q^{m-2}f'_y(x,0)+\ldots+f_{y^{m-1}}^{(m-1)}(x,0)\}\,dx=$$

$$=q^mF(p,q)-\int_0^\infty e^{-px}\sum_{k=0}^{m-1}q^{m-k-1}f_{y^k}^{(k)}(x,0)\,dx, \qquad (13.19)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^\infty e^{-qy}f_{x^ny^m}^{(n+m)}(x,y)\,dy=p^nq^mF(p,q)-$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}p^{n-r-1}q^{m-k-1}f_{x^ry^k}^{(r+k)}(0,0)+\int_0^\infty e^{-px}\sum_{k=0}^{m-1}q^{m-k-1}f_{x^ny^k}^{(k+n)}(x,0)\,dx+$$

$$+\int_0^\infty e^{-qy}\sum_{r=0}^{n-1}p^{n-r-1}f_{x^ry^m}^{(r+m)}(0,y)\,dy. \qquad (13.20)$$

Dans les formules (13.13) à (13.20), on suppose que toutes les intégrales impropres sont absolument convergentes.

Enonçons sans les démontrer les propriétés d'analyticité et d'unicité de l'intégrale de Laplace (13.1):

1. *Dans le domaine de convergence absolue de l'intégrale* (13.1), *la fonction $F(p, q)$ est une fonction analytique de p et q et*

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\,\partial q^n}F(p,q)=(-1)^{m+n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}x^my^nf(x,y)\,dx\,dy, \qquad (13.21)$$

et l'intégrale (13.21) *est absolument convergente.*

2. *Soient $F_1(p, q)$ et $F_2(p, q)$ les transformées de Laplace des fonotions $f_1(x, y)$* et *$f_2(x, y)$. Si au point (p_0, q_0) les deux intégrales sont absolument convergentes et*

$$F_1(p_0+nl,\ q_0+mk)=F_2(p_0+nl,\ q_0+mk),$$

où $l>0$, $k>0$ et $n=0, 1, 2, \ldots$; $m=0, 1, 2, \ldots$, alors $f_1(x, y)=f_2(x, y)$ en tous les points (x, y) de continuité de f_1 et f_2.

R e m a r q u e. La transformée de Laplace $F(p, q)$, si elle n'est pas identiquement nulle, ne peut posséder qu'un nombre fini de zéros aux points (p, q) : $p=p_0+nl$, $q=q_0+mk$, où l et k sont des constantes réelles et m et n parcourent la série des nombres naturels de 0 à l'infini.

Pour clore ce paragraphe, arrêtons-nous sur le théorème suivant utilisé dans la démonstration de la formule d'inversion.

Théorème 3. *Si l'intégrale* (13.1) *est absolument convergente pour* $\operatorname{Re} p>\sigma_0$ *et* $\operatorname{Re} q>\tau_0$, *alors* $\lim\limits_{\substack{\mu\to\pm\infty\\ \nu\to\pm\infty}}F(\sigma+i\mu,\ \tau+i\nu)=0$ *et la convergence est uniforme pour tous les* $\sigma\ (\sigma_1\in[\sigma, \sigma_0[$, $\tau\ (\tau_1\in\in[\tau, \tau_0[$.

D é m o n s t r a t i o n. La convergence absolue de l'intégrale (13.1) et l'inégalité

$$| F(p, q) - F_{AB}(p, q) | \leqslant \int_B^\infty \int_0^A e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} | f(x, y) | \, dx \, dy +$$

$$+ \int_A^\infty \int_0^B e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} | f(x, y) | \, dx \, dy + \int_A^\infty \int_B^\infty e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} | f(x, y) | \, dx \, dy,$$

où

$$F_{AB}(p, q) = \int_0^A \int_0^B e^{-px-qy} f(x, y) \, dx \, dy,$$

entraînent que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $N(\varepsilon)$, tel que pour $A \geqslant N$ et $B \geqslant N$ l'on a

$$| F(p, q) - F_{AB}(p, q) | < \varepsilon$$

uniformément en μ, ν et $\sigma \geqslant \sigma_1$, $\tau \geqslant \tau_1$. Donc, il suffit de démontrer le théorème pour la fonction $F_{AB}(p, q)$ à A et B quelconques fixes. Si $f(x, y)$ possède des dérivées partielles premières et une dérivée seconde mixte intégrable, il est aisé d'établir le théorème 3 au moyen d'une intégration par parties. On remarquera que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut toujours exhiber une fonction $f_1(x, y)$ possédant des dérivées partielles premières et secondes continues et telle que

$$\int_0^A \int_0^B | f(x, y) - f_1(x, y) | \, e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} \, dx \, dy < \varepsilon,$$

d'où suit le théorème 3 dans le cas général. ■

3. Inversion de l'intégrale de Laplace à deux dimensions. Le théorème d'inversion suivant est aussi important que dans le cas de l'intégrale à une dimension.

Théorème 4. *Supposons qu'une fonction $f(x, y)$ possède des dérivées partielles premières $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ et une dérivée partielle seconde mixte $f''_{xy}(x, y)$ et qu'existent des constantes positives Q, k_1 et k_2 telles que pour tous les $x \in]0, \infty[$ et $y \in]0, \infty[$ l'on ait*

$$| f(x, y) | < Q e^{k_1 x + k_2 y}, \quad | f''_{xy}(x, y) | < Q e^{k_1 x + k_2 y}. \tag{13.22}$$

Si

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y) \, dx \, dy, \tag{13.23}$$

alors

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\omega_1 \to \infty \\ \omega_2 \to \infty}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{px+qy} F(p, q) \, dp \, dq,$$

où

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{px+qy} F(p, q)\, dp\, dq, \tag{13.24}$$

où $\sigma > k_1$, $\tau > k_2$.

D é m o n s t r a t i o n. En posant $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + i\nu$ en tout point $x = a$, $(a \in]0, \infty[)$, $y = b$ $(b \in]0, \infty[)$, on aura

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1} \int_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{pa+qb} F(p, q)\, dp\, dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{(\sigma+i\mu)a+(\tau+i\nu)b} F(\sigma + i\mu, \tau + i\nu)\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{(\sigma+i\mu)(a-x)+(\tau+i\nu)(b-y)}\, d\mu\, d\nu =$$

$$= \frac{e^{\sigma a+\tau b}}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, e^{-\sigma x-\tau y} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b}\, dx\, dy. \tag{13.25}$$

Soit la fonction

$$G(x, y) = f(x, y) - f(a, y) - f(x, b) + f(a, b).$$

De toute évidence,

$$G''_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = g(x, y) \tag{13.26}$$

et

$$G(x, y) = \int_a^x \int_b^y g(u, v)\, du\, dv. \tag{13.27}$$

Par ailleurs, la fonction $g(u, v)$ vérifie (13.22), donc la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x-a)(y-b)} \tag{13.28}$$

est continue pour tous les $x \in]0, \infty]$, $y \in]0, \infty[$. De (13.22) et (13.26) il résulte que pour tous les $x > a$ et $y > b$ on aura

$$|\varphi(x, y)| < \frac{Q}{(x-a)(y-b)} \int_a^x \int_b^y e^{k_1 u+k_2 v}\, du\, dv,$$

d'où

$$|\varphi(x, y)| < Q e^{k_1 x+k_2 y}.$$

De façon analogue, pour $x > a$, $y < b$ et $x < a$, $y > b$, il vient

$$|\varphi(x, y)| < Qe^{k_1 x + k_2 b} \quad \text{et} \quad |\varphi(x, y)| < Qe^{k_1 a + k_2 y}.$$

Enfin, lorsque $x \leqslant a$ et $y \leqslant b$, on a

$$|\varphi(x, y)| \leqslant Qe^{k_1 a + k_2 b}$$

donc pour tous les $x \in]0, \infty[$ et $y \in]0, \infty[$

$$|\varphi(x, y)| \leqslant Q_1 e^{k_1 x + k_2 y}, \tag{13.29}$$

où $Q_1 = Qe^{k_1 a + k_2 b}$.

En tenant compte de la fonction $\varphi(x, y)$ introduite dans (13.28), on peut mettre (13.25) sous la forme suivante

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int\limits_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{pa+qb} F(p, q)\, dp\, dq =$$

$$= \frac{e^{\sigma a + \tau b}}{\pi^2} \left\{ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \varphi(x, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \sin \omega_1 (x-a) \sin \omega_2 (y-b)\, dx\, dy + \right.$$

$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(a, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b}\, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(x, b)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b}\, dx\, dy -$$

$$\left. - \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f(a, b)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b}\, dx\, dy \right\}. \tag{13.30}$$

Etudions le comportement des intégrales figurant dans les accolades lorsque $\omega_1 \to \infty$, $\omega_2 \to \infty$. Supposons $\sigma > k_1$ et $\tau > k_2$; l'inégalité (13.29) entraîne alors la convergence absolue de l'intégrale

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |\varphi(x, y)|\, e^{-\sigma x - \tau y}\, dx\, dy,$$

donc, (cf. théorème 3, pt. 2)

$$\lim_{\substack{\omega_1 \to \infty \\ \omega_2 \to \infty}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \varphi(x, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \sin \omega_1 (x-a) \sin \omega_2 (y-b)\, dx\, dy = 0.$$

S'agissant des trois intégrales restantes, on peut leur appliquer la théorie de l'intégrale de Fourier pour des fonctions d'une variable. En vertu de la condition (13.22), pour $\sigma > k_1$ et $\tau > k_2$ existent

les intégrales

$$\int_0^\infty | f(x, b) | e^{-\sigma x} dx; \quad \int_0^\infty | f(a, y) | e^{-\tau y} dy,$$

et, de plus, les fonctions $f(x, b)$ et $f(a, y)$ sont dérivables respectivement par rapport à x et y, donc existent les limites

$$\lim_{\omega_1 \to \infty} \int_0^\infty f(x, b) e^{-\sigma x} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} dx = \pi f(a, b) e^{-\sigma a},$$

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} \int_0^\infty f(a, y) e^{-\tau y} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b} dy = \pi f(a, b) e^{-\tau b}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{\omega_1 \to \infty} \int_0^\infty e^{-\sigma x} \frac{\sin \omega_1 (x-a)}{x-a} dx = \pi e^{-\sigma a},$$

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-\tau y} \frac{\sin \omega_2 (y-b)}{y-b} dy = \pi e^{-\tau b}.$$

D'où il résulte que les trois intégrales étudiées convergent. Leurs limites sont égales à un même nombre $\pi^2 f(a, b) e^{-\sigma a - \tau b}$. Donc, lorsque $\omega_1 \to \infty$, $\omega_2 \to \infty$ existe la limite

$$\lim_{\substack{\omega_1 \to \infty \\ \omega_2 \to \infty}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{pa+qb} F(p, q) \, dp \, dq = f(a, b), \qquad (13.31)$$

C.Q.F.D.

La formule (13.31) a été prouvée sous l'hypothèse que $a > 0$ et $b > 0$. Si $a < 0$ et $b < 0$, de (13.25) il suit immédiatement que la limite est nulle dans (13.31). Lorsque $a < 0$ et $b > 0$ ou $a > 0$ et $b < 0$, il est aisé de voir que la limite (13.31) est également nulle. Enfin si $a = 0$ et $b > 0$; $a > 0$, $b = 0$ ou $a = 0$, $b = 0$, la limite sus-citée est respectivement égale à

$$\frac{1}{2} f(+0, b), \quad \frac{1}{2} f(a, +0)$$

et

$$\frac{1}{4} [f(0, +0) + f(+0, 0) - f(0, 0)]. \quad ■$$

§ 14. Définitions et théorèmes fondamentaux du calcul opérationnel à deux variables

1. Opérateurs. La justification actuelle du calcul opérationnel à deux variables repose sur les propriétés de certains anneaux de fonctions et de corps d'opérateurs. La théorie du calcul opérationnel qui est basée sur l'application de l'intégrale de Laplace à deux dimen-

sions, découle de la théorie générale comme un cas particulier lors de l'étude des opérateurs transformables-Laplace.

Soit M_2 l'ensemble de toutes les fonctions $F(x, y)$ réelles ou complexes de deux variables réelles x et y, définies dans le domaine R ($x \in [0, \infty[$, $y \in [0, \infty[$), continues en x et y dans le domaine R_{ab} ($x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$) et représentables par

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(x, y)\, dy\, dy + \int_0^x g(x)\, dx + \int_0^y h(y)\, dy + F(0, 0). \quad (14.1)$$

Soit L_2 l'ensemble de toutes les fonctions $f(x, y)$ définies dans R ($x \in [0, \infty[$, $y \in [0, \infty[$) et absolument intégrables sur tout rectangle fini R_{ab} ($x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$); $L_1^{(x)}$ l'ensemble de toutes les fonctions $g(x)$ définies sur la section $[0, \infty[$ et absolument intégrables sur tout intervalle fini $[0, a]$. Si la fonction $F(x, y) \in M_2$ alors existent les dérivées partielles

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^y f(x, y)\, dy + f(x, 0),$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^x f(x, y)\, dx + f(0, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right] = f(x, y).$$

Inversement, si $g(x, y) \in L_2$, $g_1(x) \in L_1^{(x)}$, $h_1(y) \in L_1^{(y)}$, la fonction

$$G(x, y) = \int_0^x \int_0^y g(x, y)\, dx\, dy + \int_0^x g_1(x)\, dx + \int_0^y h_1(y)\, dy + G(0, 0) \quad (14.2)$$

appartient à M_2 et

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = \int_0^y g(x, y)\, dy + g(x, 0),$$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = \int_0^x g(x, y)\, dx + g(0, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial G(x, y)}{\partial y}\right] = g(x, y).$$

L'ensemble M_2 est un espace vectoriel dans lequel la somme et le produit par un nombre sont définis de façon naturelle.

On appelle *produit de deux fonctions* $F(x, y)$ et $G(x, y)$ de M_2 l'expression

$$H(x, y) = F(x, y) * G(x, y) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y F(x-\xi, y-\eta) G(\xi, \eta) d\xi d\eta, \qquad (14.3)$$

qui, moyennant une dérivation de l'intégrale, se représente par

$$H(x, y) = F(x, y) * G(x, y) =$$

$$= \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x-\xi, y-\eta) G(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} F(x-\xi, 0) G(\xi, y) d\xi +$$

$$+ \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} F(0, y-\eta) G(x, \eta) d\eta + F(0, 0) G(x, y). \qquad (14.4)$$

Propriétés fondamentales du produit

1. *Si* $F(x, y) \in M_2$ *et* $G(x, y) \in M_2$, *alors*

$$H(x, y) = F(x, y) * G(x, y) \in M_2.$$

2. *Le produit est commutatif, i.e.*

$$F(x, y) * G(x, y) = G(x, y) * F(x, y).$$

3. *Le produit est associatif, i.e.*

$$(F(x, y) * G(x, y)) * H(x, y) = F(x, y) * (G(x, y) * H(x, y)).$$

4. *Le produit est distributif relativement à l'addition, i.e.*

$$F(x, y) * (G(x, y) + H(x, y)) =$$
$$= F(x, y) * G(x, y) + F(x, y) * H(x, y).$$

5. *Si* $F(x, y) * G(x, y) = 0$ *quels que soient* $x \in [0, \infty[$, $y \in [0, \infty[$ *et* $F(x, y) \not\equiv 0$, *alors* $G(x, y) = 0$ *pour tous les* $x \in [0, \infty[$, $y \in [0, \infty[$. [23].

L'ensemble M_2 est un anneau commutatif d'intégrité pour la somme et le produit (14.3). En introduisant la notion de couples comme au § 3, on peut étendre M_2 à un corps de quotients. L'expression $(F(x, y), G(x, y))$, où $F(x, y)$ et $G(x, y) \neq 0$ appartiennent à M_2, s'appelle *couple*. Deux couples $(F(x, y), G(x, y))$ et $(F_1(x, y), G_1(x, y))$ sont *équivalents* si $F * G_1 = F_1 * G$. La notion d'équivalence (cf. § 3) partage l'ensemble des couples (F, G) en classes. La classe contenant le couple (F, G) est notée $\frac{F}{G}$. Par défi-

nition, $\frac{F}{G}=\frac{F_1}{G_1}$ si et seulement si $F * G_1 = F_1 * G$. La somme et le produit des symboles $\frac{F}{G}$ se définissent comme suit

$$\frac{F}{G}+\frac{F_1}{G_1}=\frac{F * G_1+F_1 * G}{G * G_1}; \quad \frac{F}{G} * \frac{F_1}{G_1}=\frac{F * F_1}{G * G_1}; \tag{14.5}$$

$$G * G_1 \neq 0.$$

L'ensemble de tous les symboles $\frac{F}{G}$ est un corps commutatif $\mathfrak{M}_2$ dont les éléments sont appelés *opérateurs*. Souvent les opérateurs sont désignés par une seule lettre, par exemple $a=\frac{F}{G}$, $b=\frac{R}{H}$, etc. Pour simplifier l'écriture on notera par ab le produit des opérateurs a et b. Ceci étant $ab = a * b=\frac{F * R}{G * H}$. Le symbole $\frac{F}{G}$ désigne la division dans $\mathfrak{M}_2$.

Propriétés fondamentales de l'addition et de la multiplication dans $\mathfrak{M}_2$

1) $ab = ba$;
2) $(ab)\, c = a\, (bc)$;
3) $a\,(b + c) = ab + ac$.

L'ensemble des opérateurs de la forme $\frac{F(x,\ y)}{1}$ peut être identifié à M_2 puisque à chacun d'eux est associée une fonction $F(x,\ y) \in M_2$. L'opérateur $\frac{F}{F}$ est noté 1 et appelé *fonction unité*. L'opérateur $\frac{0}{G}$ est noté 0. Les constantes appartiennent au corps $\mathfrak{M}_2$. L'équation

$$F(x,\ y) * X(x,\ y) = G(x,\ y),$$

où $F(x,\ y)$ et $G(x,\ y)$ sont des fonctions données de M_2 et $X(x,\ y) \in M_2$, n'admet pas forcément une solution. Dans le corps $\mathfrak{M}_2$ toute équation $ax = b$ $(a \neq 0)$ possède la solution $x = a^{-1}b=\frac{b}{a}$. Par définition du produit (14.3), il vient

$$x * F(x, y)=\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int_0^x\int_0^y (x-\xi)\, F(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta=\int_0^x F(\xi,\ y)\, d\xi, \tag{14.6}$$

$$y * F(x,\ y)=\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int_0^x\int_0^y (y-\eta)\, F(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta=\int_0^y F(x,\ \eta)\, d\eta, \tag{14.7}$$

$$xy * F(x,\ y)=\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int_0^x\int_0^y (x-\xi)(y-\eta)\, F(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta= \\ =\int_0^x\int_0^y F(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{14.8}$$

Les fonctions x, y et xy sont caractérisées par le fait que leur produit par une fonction arbitraire $f(x, y)$ équivaut à une intégration selon les formules (14.6), (14.7) et (14.8). Pour cette raison les fonctions x, y et xy seront appelées *opérateurs d'intégration* et désignées par

$$x = \frac{1}{p} = p^{-1}; \quad y = \frac{1}{q} = q^{-1}; \quad xy = \frac{1}{pq} = p^{-1}q^{-1}; \tag{14.9}$$

donc,

$$p^{-1}F(x, y) = \int_0^x F(\xi, y)\, d\xi, \tag{14.10}$$

$$q^{-1}F(x, y) = \int_0^y F(x, \eta)\, d\eta, \tag{14.11}$$

$$p^{-1}q^{-1}F(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{14.12}$$

Désignant par p^{-n}, q^{-m} et $p^{-n}q^{-m}$ les produits respectivement des n opérateurs $p^{-1} * p^{-1} * \ldots * p^{-1}$, des m opérateurs $q^{-1} * q^{-1} * \ldots$ $\ldots * q^{-1}$ et des nm opérateurs $p^{-1} * p^{-1} * \ldots * p^{-1} * q^{-1} * q^{-1} * \ldots$ $\ldots * q^{-1}$, à l'aide des formules (14.6), (14.7) et (14.8), on obtient

$$p^{-n}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{(x-\xi)^n}{n!} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} F(\xi, y)\, d\xi, \tag{14.13}$$

$$q^{-m}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{(y-\eta)^m}{m!} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^y (y-\eta)^{m-1} F(x, \eta)\, d\eta, \tag{14.14}$$

$$p^{-n}q^{-m}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^x \int_0^y \frac{(x-\xi)^n (y-\eta)^m}{n!\, m!} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{14.15}$$

Les opérateurs p, q, $pq \in \mathfrak{M}_2$, inverses des opérateurs d'intégration p^{-1}, q^{-1} et $p^{-1}q^{-1}$, sont très importants dans le calcul opérationnel à deux variables. On les appelle *opérateurs de dérivation*. Dans (14.10) et (14.11), en substituant respectivement $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ et

$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ à $F(x, y)$, on obtient

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = pF(x, y) - pF(0, y), \tag{14.16}$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = qF(x, y) - qF(x, 0) \tag{14.17}$$

De façon analogue, à l'aide de (14.16) et (14.17) il est aisé d'obtenir les formules des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = p^2 F(x, y) - p^2 F(0, y) - p\frac{\partial F(0, y)}{\partial x}, \tag{14.18}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = q^2 F(x, y) - q^2 F(x, 0) - q\frac{\partial F(x, 0)}{\partial y}, \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = pqF(x, y) - pqF(0, y) - pqF(x, 0) + pqF(0, 0). \tag{14.20}$$

On suppose l'existence de toutes les dérivées entrant dans les formules (14.16) à (14.20).

Appliquons maintenant (14.16) et (14.17) à la fonction dérivable $F(x, y) = F(x+y)$. Dans ce cas particulier $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F'(x+y)$ donc (14.16) et (14.17) entraînent

$$(p-q)F(x+y) - pF(y) + qF(x) = 0,$$

d'où

$$F(x+y) = \frac{pF(y) - qF(x)}{p-q}. \tag{14.21}$$

En appliquant les mêmes expressions à la fonction

$$F(x, y) = \begin{cases} F(y-x) & \text{lorsque } y > x, \\ 0 & \text{lorsque } y \leqslant x, \end{cases} \tag{14.22}$$

on obtient

$$\frac{p}{p+q}F(y) = \begin{cases} F(y-x) & \text{lorsque } x \in [0, y[, \\ 0 & \text{lorsque } y \in [0, x], \end{cases} \tag{14.23}$$

ou encore pour raison de symétrie

$$\frac{q}{p+q}F(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \in [0, y] \\ F(x-y) & \text{lorsque } y \in [0, x[. \end{cases} \tag{14.24}$$

2. Opérateurs transformables-Laplace. Soient S_2 l'ensemble des fonctions $f(x, y) \in L_2$, telles que l'intégrale de Laplace à deux dimensions

$$f^*(z, \zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-\zeta y} f(x, y)\, dx\, dy \tag{14.25}$$

converge absolument et S_2^* l'ensemble des transformées de Laplace (14.25). Si un opérateur $a \in \mathfrak{M}_2$ admet un représentant $(F(x, y), G(x, y))$ tel que $F(x, y) \in S_2$ et $G(x, y) \in S_2$, cet opérateur est dit *transformable-Laplace.* La fonction

$$\bar{a}(z, \zeta) = \frac{F^*(z, \zeta)}{G^*(z, \zeta)}, \tag{14.26}$$

où

$$a = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}, \quad F^*(z, \zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-\zeta y} f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$G^*(z, \zeta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-\zeta y} g(x, y)\, dx\, dy$$

s'appelle *transformée de Laplace* de l'opérateur $a = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$. Cette transformation est notée par le symbole

$$a \doteqdot \bar{a}(z, \zeta). \tag{14.27}$$

L'ensemble de tous les opérateurs du corps $\mathfrak{M}_2$ transformables-Laplace est désigné par $\mathfrak{M}_2(S_2)$ et celui des transformées de Laplace par $\overline{\mathfrak{M}}_2(S_2)$.

Théorème 1. *La transformation* (14.27) *établit entre les ensembles* $\mathfrak{M}_2(S_2)$ *et* $\overline{\mathfrak{M}}_2(S_2)$ *une correspondance biunivoque qui associe à la somme des opérateurs* $a + b$ *la somme des fonctions* $\bar{a}(z, \zeta) + \bar{b}(z, \zeta)$, *au produit des opérateurs* ab| *le produit ordinaire des fonctions* $\bar{a}(z, \zeta)\,\bar{b}(z, \zeta)$, *au zéro et à l'unité de* $\mathfrak{M}_2(S_2)$ *le zéro et l'unité de* $\overline{\mathfrak{M}}_2(S_2)$.

Si $f(x, y) \in S_2$, alors

$$f(x, y) = z\zeta F^*(z, \zeta) = \bar{f}(z, \zeta). \tag{14.28}$$

Donc, dans le corps $\mathfrak{M}_2$ on peut exhiber un sous-corps $\mathfrak{M}_2(S_2)$ isomorphe à $\overline{\mathfrak{M}}_2(S_2)$ et dont les éléments sont des fonctions $\bar{a}(z, \zeta)$ de deux variables complexes.

L'expression

$$\bar{f}(z, \zeta) = z\zeta \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-\zeta y} f(x, y)\, dx\, dy \tag{14.29}$$

s'appelle *intégrale à deux dimensions* ou *transformée de Laplace-Carson.* La fonction $\bar{f}(z, \zeta)$ est l'*image*, la fonction $f(x, y)$ l'*original.* Dans la suite on désignera par x et y les variables de l'original, et par p et q celles de l'image. Comme dans le calcul opérationnel à une variable, l'isomorphisme des ensembles $\mathfrak{M}_2(S_2)$ et $\overline{\mathfrak{M}}_2(S_2)$ nous permet de ne pas faire de distinction entre les opérateurs p et q et les nombres complexes z et ζ. Donc, dans l'ensemble $\mathfrak{M}_2(S_2)$

p et q désigneront des opérateurs et dans l'ensemble $\overline{\mathfrak{M}}_2$ (S_2) des nombres complexes. Au lieu de (14.29) on écrira

$$f(x, y) = \overline{f}(p, q). \tag{14.30}$$

La transformée de la fonction unité $\eta(x, y)$, i.e. la fonction, égale à l'unité pour tous les couples de valeurs positives de x et y et nulle lorsque l'un au moins des arguments est négatif, est l'unité. La transformation de Laplace-Carson (14.29) se distingue de la transformation (13.1) seulement par le facteur pq. Donc, tous les théorèmes et propriétés de la seconde valent visiblement pour la première.

Règle de similitude. Si $\overline{f}(p, q) = f(x, y)$, alors

$$\overline{f}\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right) = f(ax, by) \tag{14.31}$$

quels que soient a et b positifs.

Théorème de translation de l'image. Si $F(p, q) = f(x, y)$, alors

$$\frac{p}{p+a}\,\frac{q}{q+b}\,\overline{f}(p+a, q+b) = e^{-ax-by}f(x, y) \tag{14.32}$$

quels que soient a et b.

Théorème de translation de l'original. L'original de $e^{-ap-bp}F(p, q)$ n'existe que pour des valeurs réelles et positives de a et b, plus exactement, si $\overline{f}(p, q) = f(x, y)$, alors

$$e^{-ap-bq}\overline{f}(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \quad \text{ou } y < b, \\ f(x-a, y-b) & \text{pour } x > a, \ y > b. \end{cases} \tag{4.33}$$

Image des intégrales. Si $\overline{f}(p, q) = f(x, y)$, on a les relations suivantes

$$\int_0^x f(\xi, y)\,d\xi = \frac{1}{p}\overline{f}(p, q), \tag{14.34}$$

$$\int_0^y f(x, \eta)\,d\eta = \frac{1}{q}\overline{f}(p, q), \tag{14.35}$$

$$\int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{pq}\overline{f}(p, q), \tag{14.36}$$

$$\int_x^\infty \frac{f(\xi, y)}{\xi}\,d\xi = \int_0^p \frac{\overline{f}(\xi, q)}{\xi}\,d\xi, \tag{14.37}$$

$$\int_y^\infty \frac{f(x, \eta)}{\eta}\,d\eta = \int_0^q \frac{\overline{f}(p, \eta)}{\eta}\,d\eta, \tag{14.38}$$

$$\int_x^\infty \int_y^\infty \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta} d\xi\, d\eta = \int_0^p \int_0^q \frac{\bar{f}(\xi, \eta)}{\xi\eta} d\xi\, d\eta, \tag{14.39}$$

$$\int_0^x \frac{f(\xi, y)}{\xi} d\xi = \int_p^\infty \frac{\bar{f}(\xi, q)}{\xi} d\xi, \tag{14.40}$$

$$\int_0^y \frac{f(x, \eta)}{\eta} d\eta = \int_q^\infty \frac{\bar{f}(p, \eta)}{\eta} d\eta, \tag{14.41}$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta} d\xi\, d\eta = \int_p^\infty \int_q^\infty \frac{\bar{f}(\xi, \eta)}{\xi\eta} d\xi\, d\eta. \tag{14.42}$$

On suppose que toutes les intégrales impropres sont convergentes.

Image des dérivées. L'existence de l'image d'une fonction n'entraîne pas obligatoirement l'existence des images de ses dérivées. Mais si ces images existent, on les trouve comme dans le cas unidimensionnel, sauf qu'il est nécessaire de connaître un plus grand nombre de valeurs initiales. Soit, par exemple, à trouver l'original de la fonction $p\bar{f}(p, q)$. Une intégration par parties donne

$$p\bar{f}(p, q) = pq \int_0^\infty e^{-qy} \{-e^{-px} f(x, y) |_{x=0}^{x=\infty}\} dy +$$

$$+ pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx\, dy,$$

d'où il suit que si pour tous les $y > 0$, on a $f(0, y) = 0$, alors

$$p\bar{f}(p, q) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \tag{14.43}$$

De façon analogue, si pour les $x > 0$, $f(x, 0) = 0$, alors

$$q\bar{f}(p, q) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \tag{14.44}$$

Supposons que $f(0, y) = f_1(y) = \bar{f}_1(q)$. Il vient

$$f(x, y) - f_1(y) = \bar{f}(p, q) - \bar{f}_1(q).$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p[\bar{f}(p, q) - \bar{f}_1(q)]. \tag{14.45}$$

De façon analogue, si $f(x, 0) = f_2(x) = \bar{f}_2(p)$, alors

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q[\bar{f}(p, q) - \bar{f}_2(p)]. \tag{14.46}$$

Les formules (14.45) et (14.46) obtenues à l'aide de la transformation de Laplace-Carson sont une autre forme d'écriture des formules (14.46) et (14.17).

On obtiendrait un grand nombre de relations opérationnelles renfermant les dérivées en effectuant une dérivation par rapport à un paramètre. En dérivant par exemple p fois l'égalité (14.31) par rapport à a ou b, puis en faisant $a = b = 1$, on obtient

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -p \frac{\partial \overline{f}(p, q)}{\partial p}, \tag{14.45}$$

$$xy \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y} = pq \frac{\partial^2 \overline{f}(p, q)}{\partial p \, \partial q}. \tag{14.48}$$

On suppose que la fonction $f(x, y)$ est dérivable sur l'ensemble de définition tout entier et que ses dérivées admettent des images.

Théorème de multiplication. Si $\overline{f}_1(p, q) = f_1(x, y)$ et $\overline{f}_2(p, q) = f_2(x, y)$, on a la relation opérationnelle suivante (cf. (13.10)):

$$\int_0^x \int_0^y f_1(x-\xi, y-\eta) f_2(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = \frac{1}{pq} \overline{f}_1(p, q) \overline{f}_2(p, q). \tag{14.49}$$

Substitution linéaire des variables p et q. Les propriétés précédentes s'apparentent beaucoup à celles du calcul opérationnel à une variable. L'ensemble de toutes les opérations sur les fonctions de deux variables est toutefois bien plus important que sur les fonctions d'une variable. Il est des opérations qui n'ont pas d'analogue dans le cas unidimensionnel, par exemple, les opérations qui ramènent une fonction $\overline{f}(p, q)$ à la fonction $\overline{f}(p, p)$ ou $\frac{\overline{f}(p, q) - \overline{f}(q, p)}{p-q}$. Donc, les possibilités du calcul opérationnel sont bien plus vastes. Examinons quelques exemples.

Soit $m = \min(x, y)$ et $M = \max(x, y)$ et supposons que la fonction $f(t)$ est transformable-Laplace. Cherchons l'image de $f(m)$, i.e.

$$\overline{f}(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(m) \, dx \, dy.$$

Traçons la bissectrice $x = y$ du premier quadrant et calculons cette intégrale dans la région $x > y$ où $f(m) = f(y)$ et dans la région $x < y$, où $f(m) = f(x)$:

$$\overline{f}(p, q) = pq \int_0^\infty e^{-qy} f(y) \, dy \int_y^\infty e^{-px} \, dx + pq \int_0^\infty e^{-px} f(x) \, dx \int_x^\infty e^{-qy} \, dy =$$

$$= (p+q) \int_0^\infty e^{-(p+q)u} f(u) \, du.$$

En posant

$$\overline{f}(p)=p\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx,$$

on aura

$$f(m)=\overline{f}(p+q). \tag{14.50}$$

Des calculs analogues montrent que

$$f(M)=\overline{f}(p)+\overline{f}(q)-\overline{f}(p,\ q). \tag{14.51}$$

De (14.50) et (14.51), il vient

$$f(M)+f(m)=\overline{f}(p)+\overline{f}(q). \tag{14.52}$$

Cherchons maintenant l'original de la fonction $\frac{\overline{f}(p,\ q)}{p+q}$ que l'on rencontre fréquemment dans la résolution des équations à dérivées partielles. Soit

$$\overline{f}(p,\ q)=\overline{f}(x,\ q)=f(x,\ y),\qquad \left(\overline{f}(x,\ q)=q\int_0^\infty e^{-qy}f(x,\ y)\,dy\right).$$

Comme

$$\frac{p}{p+q}=e^{-qx},$$

le théorème de multiplication (14.49) donne

$$\frac{\overline{f}(p,\ q)}{p+q}=\frac{1}{p}\,\frac{p}{p+q}\,\overline{f}(p,\ q)=\int_0^x e^{-q\xi}\overline{f}(x-\xi,\ q)\,d\xi.$$

Le théorème de translation sur la variable q entraîne

$$e^{-q\xi}\overline{f}(x-\xi,\ q)=\begin{cases} 0 & \text{pour}\quad y<\xi,\\ f(x-\xi,\ y-\xi) & \text{pour}\quad y>\xi,\end{cases}$$

d'où il suit que

$$\frac{\overline{f}(p,\ q)}{p+q}=\int_0^{\min(x,\ y)} f(x-\xi,\quad y-\xi)\,d\xi; \tag{14.53}$$

et, en particulier,

$$\frac{\overline{f}(p)\,\overline{\varphi}(q)}{p+q}=\int_0^{\min(x,\ y)} f(x-\xi)\,\varphi(y-\xi)\,d\xi. \tag{14.54}$$

On remarquera enfin qu'il est parfois nécessaire de trouver les originaux de fonctions telles que $\overline{f}(p,\ p)$, $\overline{f}\left(\sqrt{p},\ p\right)$, etc. Soit par

exemple à trouver l'original de $\overline{f}(p, p)$. On a

$$\frac{1}{p}\overline{f}(p, p)=p\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p(\xi+\eta)}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Introduisons la nouvelle variable $x = \xi + \eta$; il vient

$$\frac{1}{p}\overline{f}(p, p)=\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^x f(\xi, x-\xi)\,d\xi.$$

Donc,

$$\frac{1}{p}\overline{f}(p, p)=\int_0^x f(x-\xi, \xi)\,d\xi. \tag{14.55}$$

Image de $f(x + y)$. L'image opérationnelle d'une fonction $f(x + y)$ a été donnée par la formule (14.21). Cherchons maintenant l'image de cette fonction à l'aide d'une transformation intégrale. Le changement de variable $x + y = u$ donne

$$\overline{f}(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x+y)\,dx\,dy=$$

$$=pq\int_0^\infty e^{-pu}f(u)\,du\int_0^u e^{(p-q)y}\,dy=$$

$$=\frac{pq}{p-q}\int_0^\infty (e^{-qu}-e^{-pu})\,f(u)\,du=\frac{p\overline{f}(q)-q\overline{f}(p)}{p-q},$$

donc,

$$f(x+y)=\frac{p\overline{f}(q)-q\overline{f}(p)}{p-p}. \tag{14.56}$$

Par exemple,

$$\sin(x+y)=\frac{pq(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)}, \quad \cos(x+y)=\frac{pq(pq-1)}{(p^2+1)(q^2+1)},$$

$$J_0(2\sqrt{x+y})=\frac{q\exp\left(-\frac{1}{p}\right)-p\exp\left(-\frac{1}{q}\right)}{q-p}.$$

Image de $f(|x - y|)$. Si l'on suppose que $f(x)$ est nulle pour les valeurs négatives de l'argument, on peut trouver l'image d'une fonction $f(x - y)$. Soit

$$f_1(x, y)=\begin{cases} f(x-y) & \text{pour} \quad x>y, \\ 0 & \text{pour} \quad x<y. \end{cases}$$

Calculons

$$\overline{f}_1(p, q) = pq \int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_y^\infty e^{-px} f(x-y)\,dx.$$

En posant $x-y=u$, on obtient

$$f_1(x, y) = \overline{f}_1(p, q) = \frac{q}{p+q}\overline{f}(p). \tag{14.57}$$

Soit maintenant

$$f_2(x, y) = \begin{cases} f(y-x) & \text{pour } y > x, \\ 0 & \text{pour } y < x; \end{cases}$$

en raison de la symétrie avec (14.57), il vient

$$f_2(x, y) = \overline{f}_2(p, q) = \frac{p}{p+q}\overline{f}(q). \tag{14.58}$$

En groupant (14.57) et (14.58), on obtient

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = f(|x-y|) = \frac{p\overline{f}(q) + q\overline{f}(p)}{p+q}. \tag{14.59}$$

Les formules (14.57) et (14.58) ne sont autres que les relations (14.23) et (14.24) déjà connues.

Image de $f(xy)$. Pour calculer l'image d'une fonction $f(xy)$, il faut se servir de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-pt-\frac{q}{t}}\frac{dt}{t} = 2K_0(2\sqrt{pq});$$

alors

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(xy)\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x}\,dx \int_0^\infty e^{-\frac{q\xi}{x}} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= 2\int_0^\infty K_0(2\sqrt{pq\xi}) f(\xi)\,d\xi,$$

d'où il suit

$$f(xy) = 2pq\int_0^\infty K_0(2\sqrt{pq\xi}) f(\xi)\,d\xi. \tag{14.60}$$

Remarque. La relation opérationnelle (14.50) entraîne que l'ensemble de toutes les fonctions $f(m)$ est un anneau, i.e. dans l'ensemble de fonctions $\overline{f}(p, q)$ on peut exhiber un sous-anneau de fonctions $\overline{f}(p+q)$ qui sont en fait des fonctions d'une variable. Donc, les fonctions $\overline{f}(p+q)$ s'identifient aux fonctions d'une va-

riable $\bar{f}(B)$. Ici, eu égard à (14.3), il vient

$$h(m) = f(m) * g(m) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^x \int_0^y f[\min(x-\xi,\ y-\eta)]\, g[\min(\xi,\ \eta)]\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_0^y f(y-\eta)\, g(\eta)\, d\eta = h(y) \quad \text{pour} \quad x > y \\ \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi = h(x) \quad \text{pour} \quad x < y. \end{cases} \tag{14.61}$$

L'expression (14.61) est un produit de convolution ordinaire. Mais il peut arriver que l'on obtienne un autre opérateur si l'on considère d'autres combinaisons des arguments. En particulier, si l'on étudie l'anneau de fonctions $f(xy)$, en vertu de (14.60), on aura

$$f(xy) = \bar{f}(pq) = 2pq \int_0^\infty K_0\left(2\sqrt{pq\xi}\right) f(\xi)\, d\xi.$$

Donc, les fonctions $f(x,\ y) = f(xy)$ forment également un anneau, puisque en posant $pq = B$, on obtient de nouveau une fonction d'une variable $\bar{f}(B)$. Tous calculs faits à l'aide de (14.3), on obtient

$$h(x,\ y) = f(xy) * g(xy) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^x \int_0^y f[(x-\xi)(y-\eta)]\, g(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^1 \int_0^1 f[xy(1-u)(1-v)]\, g(xyuv)\, xy\, du\, dv. \tag{14.62}$$

En développant l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ on constate que la fonction $h(x,\ y)$ dépend uniquement du produit xy. En posant $xy = t$, on obtient

$$h(t) = f(t) * g(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{t \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 f[t(1-u)(1-v)]\, g(tuv)\, t\, du\, dv\right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\, t \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^1 f(\xi\eta)\, g[(1-\eta)(t-\xi)]\, d\eta. \tag{14.63}$$

L'introduction du produit (14.63) conduit à un nouveau calcul opérationnel étroitement rattaché à l'équation de Bessel [8]. L'analogue de la transformation de Laplace sera ici la t r a n s f o r m a -

tion de Meijer

$$\bar{f}(B)=2\int_0^\infty K_0\left(2\sqrt{B\xi}\right)f(\xi)\,d\xi. \tag{14.64}$$

En conclusion citons encore une formule pour la transformation de Laplace-Carson à deux dimensions:

$$\Phi(x,\ y)=\int_0^{\min(x,\,y)} f(x-\xi)\,g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi,$$

alors

$$\bar{\Phi}(p,\ q)=\bar{f}(p)\,\bar{g}(q)\int_0^\infty e^{-(p+q)\xi}K(\xi)\,d\xi. \tag{14.65}$$

On suppose que toutes les intégrales impropres sont absolument convergentes. On a

$$\bar{f}(p,\ q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\,dx\,dy\int_0^{\min(x,\,y)} f(x-\xi)\,g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi=$$

$$=pq\int_0^\infty e^{-qy}\,dy\int_y^\infty e^{-px}\,dx\int_0^y f(x-\xi)\,g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi+$$

$$+pq\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_x^\infty e^{-qy}\int_0^x f(x-\xi)\,g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi=$$

$$=pq\int_0^\infty e^{-qy}\,dy\int_0^y g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi\int_y^\infty e^{-px}f(x-\xi)\,dx+$$

$$+pq\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^x f(x-\xi)\,K(\xi)\,d\xi\int_x^\infty e^{-qy}g(y-\xi)\,dy=$$

$$=pq\int_0^\infty e^{-qy}\,dy\int_0^y e^{-p\xi}g(y-\xi)\,K(\xi)\,d\xi\int_{y-\xi}^\infty e^{-pu}f(u)\,du+$$

$$+pq\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^x e^{-q\xi}f(x-\xi)\,K(\xi)\,d\xi\int_{x-\xi}^\infty e^{-pv}g(v)\,dv=$$

$$=pq\int_0^\infty e^{-(p+q)\xi}K(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-qy}g(y)\,dy\int_y^\infty e^{-pu}f(u)\,du+$$

$$+pq\int_0^\infty e^{-(p+q)\xi}K(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx\int_x^\infty e^{-qv}g(v)\,dv;$$

donc

$$\bar{f}(p,\ q)=pq\int\limits_0^\infty e^{-(p+q)\xi}K(\xi)\,d\xi\left\{\int\limits_0^\infty dy\int\limits_y^\infty e^{-qy-px}g(y)\,f(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty dx\int\limits_x^\infty e^{-px-qy}f(x)\,g(y)\,dy\right\}=$$

$$=pq\int\limits_0^\infty e^{-(p+q)\xi}K(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px-qy}f(x)\,g(y)\,dx\,dy.$$

§ 15. Application du calcul opérationnel à deux variables à la résolution de quelques problèmes d'analyse

1. Calcul d'intégrales. Les intégrales à calculer sont considérées soit comme des originaux soit comme des images. Par ailleurs, on peut introduire sous le signe d'intégration un paramètre arbitraire pour certaines valeurs duquel on obtient l'intégrale cherchée. On peut utiliser enfin les formules du calcul opérationnel à une variable déduite des formules respectives du calcul opérationnel à deux variables en remplaçant l'un des deux arguments de l'image par la valeur de l'autre. Ainsi, en vertu de (14.55), on a

$$\frac{\bar{f}(p,\ p)}{p}=\int\limits_0^x f(x-s,\ s)\,ds. \tag{15.1}$$

Donc, si l'on connaît l'image $\bar{f}(p,\ q)$ de la fonction $f(x,\ y)$ et l'original de la fonction $\frac{\bar{f}(p,\ p)}{p}$, on peut calculer l'intégrale (15.1). Le changement $s=x\sin^2\varphi$ ramène les intégrales (15.1) à des intégrales définies renfermant des fonctions trigonométriques; on a

$$\varphi(x)=\int\limits_0^x f(x-s,\ s)\,ds=2x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos^2\varphi,\quad x\sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi. \tag{15.2}$$

Calculons quelques intégrales (15.1) renfermant des fonctions de Bessel. Compte tenu de la correspondance opérationnelle

$$\operatorname{ber}\left(2\sqrt{xy}\right)=\frac{p^2q^2}{p^2q^2+1},$$

on obtient

$$\frac{p^3}{p^4+1}=2x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ber}\ (2x\cos\varphi\sin\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi. \tag{15.3}$$

Désignons par $f(x;\ k,\ n)$ la fonction d'image $\frac{p^{k-1}}{p^n+1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$, i.e.

$$\frac{p^k}{p^n+1}=p\int_0^\infty e^{-px}f(x;\ k,\ n)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{15.4}$$

Il est aisé de montrer en développant l'expression (15.4) sur les puissances de $\frac{1}{p}$ que

$$f(x;\ k,\ n)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\, x^{n\nu+n-k}}{(n\nu+n-k)\,!}. \tag{15.5}$$

Désignons par $h\ (x;\ k,\ n)$ la fonction d'image $\frac{p^{k-1}}{p^n-1}$ $k=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$, i.e.

$$\frac{p^k}{p^n-1}=p\int_0^\infty e^{-px}h(x;\ k,\ n)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{15.6}$$

et

$$h(x;\ k,\ n)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{n\nu+n-k}}{(n\nu+n-k)\,!}. \tag{15.7}$$

Les égalités (15.3), (15.4) et (15.5) entraînent

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ber}(x\sin t)\sin t\,dt=f(x;\ 3,\ 4)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

De façon analogue, la formule

$$\operatorname{bei}(2\sqrt{xy})=\frac{pq}{p^2q^2+1}$$

permet de calculer l'intégrale

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{bei}(x\sin t)\sin t\,dt=f\ (x\ ;\ 1,\ 4).$$

Utilisons maintenant la relation opérationnelle

$$\pi\sqrt{pq}\,J_0\left(\frac{1}{2\sqrt{pq}}\right)=\frac{\operatorname{ber}(\sqrt[4]{xy})}{\sqrt{xy}}$$

En vertu de (15.1) et (15.2), on aura

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ber}\left(\sqrt{2x \sin t}\right) dt = \pi J_0\left(\frac{1}{2p}\right).$$

Compte tenu de la relation

$$J_0\left(\frac{1}{2p}\right) = J_0(\sqrt{x})\, I_0(\sqrt{x}),$$

il vient

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ber} \sqrt{2x \sin t})\, dt = \pi J_0(\sqrt{x})\, I_0(\sqrt{x}).$$

La formule

$$\frac{p^3 q}{p^3 q + 1} = {}_0F_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; -\frac{x^3 y}{27}\right),$$

nous permet d'aboutir au résultat suivant

$$\int_0^{x} {}_0F_3\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; -\frac{(x-s)^3 s}{27}\right] ds = f(x;\ 3,\ 4).$$

Pour le calcul des intégrales, au lieu de (15.1), on peut se servir d'autres relations opérationnelles analogues, par exemple

$$\frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{p},\ p) = \int_0^{\infty} ds \int_0^{x} \frac{1}{\pi \sqrt{x-t}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s,\ t)\, dt, \qquad (15.8)$$

$$\frac{\bar{f}(\sqrt{p},\ p)}{\sqrt{p}} = \int_0^{\infty} ds \int_0^{x} \frac{s}{2\sqrt{\pi (x-t)^3}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s,\ t)\, dt. \qquad (15.9)$$

En appliquant (15.8) à la relation

$$\operatorname{ber}\left(2\sqrt{xy}\right) = \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 + 1},$$

on obtient sans peine

$$\int_0^{\infty} ds \int_0^{x} \frac{1}{\pi \sqrt{x-t}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} \operatorname{ber}\left(2\sqrt{st}\right) dt = f(x;\ 2,\ 3).$$

On rappelle qu'il est possible de calculer des intégrales en introduisant sous le signe d'intégration un paramètre arbitraire pour certaines valeurs duquel on obtient l'intégrale cherchée. Illustrons ceci sur l'exemple simple de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \sin xs \cos s \frac{ds}{s}.$$

Soit le paramètre auxiliaire y défini comme suit

$$F(x,\ y)=\int_0^\infty \sin xs \cos ys \frac{ds}{s}.$$

Les formules

$$\sin xs=\frac{ps}{p^2+s^2}, \qquad \cos ys=\frac{q^2}{q^2+s^2},$$

donnent

$$F(x,\ y)=\int_0^\infty \frac{ps}{p^2+s^2}\frac{q^2}{q^2+s^2}\frac{ds}{s}=\frac{\pi}{2}\frac{q}{p+q}.$$

En passant à l'original dans le second membre, on aura

$$\frac{\pi}{2}\frac{q}{p+q}=f(x,\ y)=\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x<y, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pour} \quad x>y. \end{cases}$$

Si $y=1$, il vient

$$\int_0^\infty \sin xs \cos s\frac{ds}{s}=\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour} \quad x>1, \\ 0 & \text{pour} \quad x<1. \end{cases} \tag{15.10}$$

Pour conclure ce paragraphe, montrons l'égalité suivante

$$\int_0^\infty e^{-k\lambda^2}J_0(\lambda r)\,J_0(\lambda\xi)\,\lambda\,d\lambda=\frac{1}{2k}e^{-\frac{r^2+\xi^2}{4k}}I_0\left(\frac{r\xi}{2k}\right). \tag{15.11}$$

L'intégrale (15.11) s'appelle *intégrale de Weber*. En posant $\lambda = 2\sqrt{\mu}$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-4k\mu}J_0(2r\sqrt{\mu})J_0(2\xi\sqrt{\mu})\,d\mu=\frac{1}{4k}e^{-\frac{r^2+\xi^2}{4k}}I_0\left(\frac{r\xi}{2k}\right).$$

Si maintenant $r^2 = x$, $\xi^2 = y$, $4k = \theta$ $(r > 0,\ \xi > 0)$, on trouve

$$\int_0^\infty e^{-\Theta\mu}J_0(2\sqrt{x\mu})\,J_0(2\sqrt{y\mu})\,d\mu=\frac{1}{\Theta}e^{-\frac{x+y}{\Theta}}I_0\left(\frac{2\sqrt{xy}}{\Theta}\right). \tag{15.12}$$

La dernière égalité se démontre aisément à l'aide du calcul opérationnel à deux variables. Utilisons les relations opérationnelles

$$e^{-\frac{\mu}{p}}=J_0(2\sqrt{\mu x}). \tag{15.13}$$

$$e^{-\frac{\mu}{q}}=J_0(2\sqrt{\mu y}). \tag{15.14}$$

Ces relations entraînent

$$e^{-\frac{\mu}{p}-\frac{\mu}{q}}=J_0(2\sqrt{\mu x})\,J_0(2\sqrt{\mu y}). \tag{15.15}$$

En multipliant (15.15) par $e^{-\Theta\mu}$ et intégrant sur μ entre 0 et ∞, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\Theta\mu} J_0(2\sqrt{\mu x})\, J_0(2\sqrt{\mu y})\, d\mu = \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\Theta}. \qquad (15.16)$$

Reste maintenant à trouver l'original de

$$\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\Theta} = \frac{pq}{\Theta pq+p+q}.$$

On rappelle que

$$I_0(2\sqrt{xy}) = \frac{pq}{pq-1}.$$

D'où l'on déduit, en vertu du théorème de translation de l'image (14.32), que

$$e^{-x-y} I_0(2\sqrt{xy}) \frac{p}{(p+1)(q+1)} \frac{(p+1)(q+1)}{[(p+1)(q+1)-1]} = \frac{pq}{pq+p+q}. \qquad (15.17)$$

En substituant x à $\frac{x}{\Theta}$ et y à $\frac{y}{\Theta}$ dans (15.17) et en appliquant la règle de similitude (14.31), on obtient

$$e^{-\frac{x+y}{\Theta}} I_0\left(\frac{2\sqrt{xy}}{\Theta}\right) = \frac{\Theta^2 pq}{\Theta^2 pq+\Theta p+\Theta q} = \frac{\Theta pq}{\Theta pq+p+q}. \qquad (15.18)$$

(15.16) et (15.18) entraînent (15.12) et (15.11).

2. Développements bilinéaires. En théorie de corrélation et, en particulier, en théorie des processus markoviens stationnaires, on rencontre souvent des développements de la forme

$$p(x)\, p(y) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, \varphi_n(y)\, \lambda^n = f(x, y), \qquad (15.19)$$

où $|\lambda| < 1$, $p(x)$ est le poids avec lequel les fonctions φ_n forment un système orthonormé sur l'intervalle $[a, b]$. Pour faire la somme des séries (15.19) il y a parfois intérêt à appliquer les méthodes du calcul opérationnel à deux variables. Explicitons tout d'abord la forme bilinéaire

$$e^{-x-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)\, L_n(y)}{n+1} = f(x, y), \qquad (15.20)$$

où

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (15.21)$$

sont des polynômes de Laguerre. Montrons que

$$f(x, y) = \begin{cases} \int\limits_y^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt & \text{pour} \quad x < y, \\ \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt & \text{pour} \quad x > y. \end{cases} \tag{15.22}$$

Compte tenu de la relation opérationnelle

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = \overline{f}(p) = L_n(x) \tag{15.23}$$

et en vertu du théorème de translation de l'image

$$\frac{p}{p+\lambda}\,\overline{f}(p+\lambda) = e^{-\lambda x} f(x), \tag{15.24}$$

il vient pour $\lambda = 1$ et $f(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$

$$\frac{p}{p+1}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right)^n = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} = e^{-x} L_n(x). \tag{15.25}$$

En remplaçant x par y et p par q, on obtient

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^{n+1} = e^{-y} L_n(y). \tag{15.26}$$

(15.25) et (15.26) entraînent

$$e^{-x-y} L_n(x)\, L_n(y) = \left[\frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right]^{n+1}.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)\, L_n(y)}{n+1} = f(x, y) = -\ln\left[1 - \frac{pq}{(p+1)(q+1)}\right],$$

ou

$$f(x, y) = \ln(p+1) + \ln(q+1) - \ln(p+q+1). \tag{15.27}$$

Par ailleurs, la formule (14.51), où

$$f(x) = \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

et les relations opérationnelles

$$\ln(p+1) = \int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt, \tag{15.28}$$

$$\ln(q+1) = \int\limits_y^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \tag{15.29}$$

donnent

$$f(M) = \ln(p+1) + \ln(q+1) - \ln(p+q+1), \qquad (15.30)$$

où $M = \max(x, y)$. De toute évidence les égalités (15.27), (15.30) et la formule (14.50) entraînent

$$\ln(p+q+1) = \begin{cases} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt & \text{pour} \quad x < y, \\ \int_y^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt & \text{pour} \quad x > y. \end{cases} \qquad (15.31)$$

Les égalités (15.27), (15.28), (15.29) et (15.31) impliquent (15.22).

Montrons encore une formule contenant des polynômes de Laguerre, plus exactement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) L_n(y) \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{\lambda(x+y)}{1-\lambda}} \times$$

$$\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\lambda xy}}{1-\lambda}\right), \quad |\lambda| < 1. \qquad (15.32)$$

De (15.23) il suit visiblement

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n = L_n(y), \qquad (15.33)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) L_n(y) \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\lambda\right]^n,$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) L_n(y) \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} \frac{pq}{pq + \frac{\lambda}{1-\lambda}(p+q) - \frac{\lambda}{1-\lambda}}. \qquad (15.34)$$

Pour calculer l'original du second membre, utilisons la formule

$$\frac{pq}{pq - ap - bq + c} = e^{bx+ay} J_0\left(2\sqrt{(c-ab)xy}\right). \qquad (15.35)$$

L'égalité (15.32) découle de (15.34) et (15.35).

Calculons maintenant la somme d'une série plus générale

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \Gamma(2\nu + n) N_{k+n, m}(x) N_{\lambda+n, \mu}(y), \qquad (15.36)$$

$$2\nu \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

où

$$N_{k,m}(x)=\frac{x^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m+1)}M_{k,m}(x)=$$

$$=\frac{x^{2m}e^{-\frac{t}{2}}}{\Gamma(2m+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-n+m,\ 2m+1;\ x\right),\quad (15.37)$$

$$M_{k,m}(x)=x^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-k+m,\ 2m+1;\ x\right)$$

étant des *fonctions de Whittaker*;

$${}_1F_1(a,\ b;\ z)=1+\frac{a}{1!\,b}z+\frac{a(a+1)}{2!\,b(b+1)}z^2+\ \ldots$$

une *série hypergéométrique de Kummer*.

La série (15.36) est convergente pour toutes les valeurs réelles de x et y et des valeurs (réelles ou complexes) quelconques du paramètre λ, telles que $|\lambda|<1$.

Si l'on admet que

$$0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}m+\frac{1}{2},\quad 0<\operatorname{Re}\nu<\operatorname{Re}\mu+\frac{1}{2},\quad |\lambda|<1,\quad (15.38)$$

la sommation de la série (15.36) peut être ramenée à la sommation de la série plus simple

$$f_0(x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\Gamma(2\nu+k)\,N_{\nu+k,\ \nu-\frac{1}{2}}(x)\,N_{\nu+k,\ \nu-\frac{1}{2}}(y).\quad (15.39)$$

Cette sommation peut être effectuée à l'aide de la formule suivante pour les N-fonctions de Whittaker

$$\int_0^t N_{k,m}(t-\tau)\,N_{k',m'}(\tau)\,d\tau=N_{k+k',\ m+m'+\frac{1}{2}}(t).\quad (15.40)$$

La formule (15.40) se déduit aisément si l'on tient compte du fait que la fonction $N_{k,m}(t)$ possède une transformée de Laplace simple

$$\mathscr{L}\{N_{k,m}(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-pt}N_{k,m}(t)\,dt=\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}\left(\operatorname{Re}m>-\frac{1}{2}\right).\quad (15.41)$$

En vertu de (15.40), on a

$$N_{k+r,\ m}(x)=\int_0^x N_{k-\nu,\ m-\nu}(x-\xi)\,N_{\nu+r,\ \nu-\frac{1}{2}}(\xi)\,d\xi,$$

$$N_{\varkappa+r,\ \mu}(y)=\int_0^y N_{\varkappa-\nu,\ \mu-\nu}(y-\eta)\,N_{\nu+r,\ \nu-\frac{1}{2}}(\eta)\,d\eta.$$

Donc, si les conditions (15.38) sont remplies, on aura

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y N_{k-\nu, m-\nu}(x-\xi) N_{\varkappa-\nu, \mu-\nu} \times$$
$$\times (y-\eta) f_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (15.42)$$

Eu égard à (15.39) et (15.41), il vient

$$\mathscr{L}_{p,q}\{f_0(x, y)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f_0(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{\lambda^r}{r!} \Gamma(2\nu + r) \frac{\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{1}{2}\right)\right]^r}{\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(q+\frac{1}{2}\right)\right]^{2\nu+r}}.$$

La série du second membre est convergente pour $|\lambda| < 1$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. Quelques transformations simples donnent

$$\mathscr{L}_{p,q}\{f_0(x, y)\} =$$
$$= \Gamma(2\nu)(1-\lambda)^{-2\nu} \left[\left(p + \frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\left(q + \frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) - \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\right]^{-2\nu}.$$

En se servant de l'égalité

$$\mathscr{L}_{p,q}\{(xy)^{\frac{m}{2}} J_m(2\sqrt{cxy})\} = \frac{\Gamma(m+1)\, c^{\frac{m}{2}}}{(pq-c)^{m+1}}, \quad \operatorname{Re} m > -1,$$

et de la formule (13.7), on obtient

$$\mathscr{L}_{p,q}\{f_0(x, y)\} =$$
$$= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}-\nu}}{1-\lambda} \mathscr{L}_{p,q}\left\{(xy)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(x+y)} I_{2\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda xy}}{1-\lambda}\right)\right\},$$

donc,

$$f_0(x, y) = \sum_{r=0}^\infty \frac{\lambda^r}{r!} \Gamma(2\nu + r) N_{\nu+r, \nu-\frac{1}{2}}(x) N_{\nu+r, \nu-\frac{1}{2}}(y) =$$
$$= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}-\nu}}{1-\lambda} (xy)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(x+y)} I_{2\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda xy}}{1-\lambda}\right). \qquad (15.43)$$

En particulier, en posant $2\nu = \alpha + 1$ et compte tenu de

$$N_{m+n+\frac{1}{2}, m}(x) = \frac{n!\, x^{2m} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(x),$$

$$N_{-m-n-\frac{1}{2}, m}(x) = \frac{n!\, x^{2m} e^{\frac{x}{2}}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(-x),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

où

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$$

sont des polynômes de Laguerre, on déduit à partir de (15.43)

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!\lambda^r}{\Gamma(\alpha+r+1)} L_r^{(\alpha)}(x) L_r^{(\alpha)}(y) =$$

$$= \left(\frac{\lambda xy}{1-\lambda}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}(x+y)} I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{\lambda xy}}{1-\lambda}\right). \quad (15.44)$$

A remarquer qu'on obtiendrait la formule (15.32) en faisant $\alpha = 0$ dans (15.44). Si les conditions (15.38) sont réalisées, les formules (15.42) et (15.43) entraînent

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} \Gamma(2\nu + r) N_{k+r, m}(x) N_{x+r, \mu}(y) =$$

$$= \int_0^x \int_0^y \frac{\lambda^{\frac{1}{2}-\nu}}{1-\lambda} N_{k-\nu, m-\nu}(x-\xi) N_{k-\nu, \mu-\nu}(y-\eta) \times$$

$$\times (\xi\eta)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(\xi+\eta)} I_{2\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda\xi\eta}}{1-\lambda}\right) d\xi\, d\eta, \quad |\lambda| < 1. \quad (15.45)$$

3. Equations différentielles. Les méthodes du calcul opérationnel à deux variables sont efficaces pour résoudre des problèmes aux limites pour des équations différentielles à dérivées partielles. Comme dans le calcul opérationnel ordinaire, la résolution se décompose en trois étapes:

1. Composition de l'équation opérationnelle.
2. Résolution de l'équation opérationnelle.
3. Passage de la solution de l'équation opérationnelle à la solution cherchée.

Dans la première étape on peut être confronté aux difficultés spécifiques du calcul opérationnel à deux variables, difficultés liées au fait que des conditions aux limites « subsidiaires » non données dans la position du problème, peuvent être nécessaires. Dans la deuxième étape, il faut éliminer ces conditions « subsidiaires » en se servant des propriétés de la solution de l'équation opérationnelle. Dans la troisième étape enfin, il faut passer de la solution de l'équation opérationnelle à la solution cherchée, soit à l'aide de tables de formules opérationnelles (cf. [9], [10]), soit à l'aide des formules d'inversion. Bornons-nous à l'examen d'équations différentielles aux dérivées partielles à coefficients constants et à deux variables indépendantes x et y qui sont supposées réelles et positives.

1°. Examinons tout d'abord l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y), \quad x\in]0, \infty[, \quad y\in]0, \infty[. \tag{15.46}$$

Pour appliquer le calcul opérationnel et trouver l'image opérationnelle de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, il faut se donner les valeurs de la fonction $u(x, y)$ pour $x = 0$ et $y = 0$, i.e.

$$u(0, y) = a(y) \quad \text{et} \quad u(x, 0) = b(x).$$

Supposons que

$$u(x, y)=\bar{u}(p, q), \quad f(x, y)=\bar{f}(p, q), \quad a(y)=\bar{a}(q), \quad b(x)=\bar{b}(p). \tag{15.47}$$

Dans les notations (15.47), l'image opérationnelle de (15.46) s'écrit

$$p\{\bar{u}(p, q)-\bar{a}(q)\}+q\{\bar{u}(p, q)-\bar{b}(p)\}=\bar{f}(p, q),$$

d'où

$$\bar{u}(p, q)=\frac{\bar{f}(p, q)}{p+q}+\frac{p}{p+q}\bar{a}(q)+\frac{q}{p+q}\bar{b}(p).$$

Les formules (14.23) et (14.24) donnent

$$\frac{p}{p+q}\bar{a}(q)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x>y, \\ a(y-x) & \text{pour } x<y; \end{cases}$$

$$\frac{q}{p+p}\bar{b}(p)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x<y, \\ b(x-y). & \text{pour } x>y. \end{cases}$$

Compte tenu de (14.53), on obtient la solution cherchée

$$u(x, y)=\begin{cases} b(x-y)+\int\limits_0^y f(x-s, y-s)\,ds \text{ pour } x>y, \\ a(y-x)+\int\limits_0^x f(x-s, y-s)\,ds \text{ pour } x<y. \end{cases}$$

D'où il suit que lorsque $a(0) = b(0)$, la fonction $u(x, y)$ est définie et continue dans le domaine R ($x \in [0, \infty[$, $y \in [0, \infty[$) et dérivable pour $y > x$ et $y < x$. Les fonctions $a(y)$ et $b(x)$ sont indépendantes l'une de l'autre. La méthode de résolution implique que les fonctions soient transformables-Laplace. A noter que l'existence et l'unicité d'une solution analytique de l'équation (15.46) sont définies par ses valeurs sur l'axe $x = 0$, i.e. seulement par $a(y)$. Cependant la donnée de $b(x)$ ne contredit pas ce fait, puisqu'on obtiendrait une solution qui n'est pas analytique sur la droite $y = x$.

2°. Soit donnée l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y), \quad x\in]0, \infty[, \quad y\in]0, \infty[. \tag{15.48}$$

Ici les fonctions $a(y)$ et $b(x)$ ne peuvent pas être choisies indépendamment l'une de l'autre. En effet, dans les notations (15.47) l'image opérationnelle de l'équation (15.48) est

$$p\{\bar{u}(p, q) - \bar{a}(q)\} - q\{\bar{u}(p, q) - \bar{b}(p)\} = \bar{f}(p, q),$$

d'où

$$\bar{u}(p, q) = \frac{\bar{f}(p, q) - p\bar{a}(q) - q\bar{b}(p)}{p-q}. \tag{15.49}$$

L'image opérationnelle de la solution cherchée doit être une fonction analytique pour toutes les valeurs des paramètres p et q, telles que $\operatorname{Re} p > \alpha$, $\operatorname{Re} q > \beta$, où α et β sont des constantes dûment choisies. Donc, le numérateur de la fraction (15.49) doit être nul pour $p = q$, ce qui donne

$$p\bar{a}(p) - p\bar{b}(p) + \bar{f}(p, p) = 0. \tag{15.50}$$

En passant à l'original, on obtient la relation suivante entre les fonctions $a(x)$ et $b(x)$:

$$a(x) - b(x) + \int_0^x f(x-s, s)\, ds = 0. \tag{15.51}$$

Donc, la méthode opérationnelle permet d'éliminer les conditions initiales subsidiaires. La relation (15.51) est la « condition de compatibilité » des conditions initiales. Si elle est remplie, la fonction $\bar{u}(p, q)$ est l'image opérationnelle de la solution cherchée. En portant la valeur de $\bar{b}(p)$, tirée de (15.50), dans (15.49), on obtient

$$\bar{u}(p, q) = \frac{p\bar{a}(q) - q\bar{a}(p)}{p-q} + \frac{\bar{f}(p, q)}{p-q} + \frac{q\bar{f}(p, q)}{p(p-q)}. \tag{15.52}$$

En vertu de (14.21) ou (14.56), l'original de la première fraction est la fonction $a(x + y)$. Si l'on met la deuxième fraction sous la forme

$$\frac{1}{q}\bar{f}(p, q)\frac{q}{p-q},$$

on trouve aisément son original par rapport à q. En effet, soit

$$\frac{q}{q-p} = e^{py}; \quad \bar{f}(p, q) = \bar{f}_1(p, y),$$

le théorème du produit de convolution donne

$$\frac{1}{q}\bar{f}(p, q)\frac{q}{q-p} = e^{py}\int_0^y e^{-ps}\bar{f}(p, s)\, ds. \tag{15.53}$$

D'autre part, puisque

$$\frac{\bar{f}(p, p)}{p} = \int_0^\infty e^{-py}\bar{f}_1(p, y)\, dy,$$

il vient

$$\frac{q}{q-p}\,\frac{\bar{f}(p,\,p)}{p}=e^{py}\int_{0}^{\infty}e^{-ps}\bar{f}(p,\,s)\,ds. \qquad (15.54)$$

Les égalités (15.53) et (15.54) entraînent

$$\frac{\bar{f}(p,\,q)}{p-q}-\frac{q\bar{f}(p,\,p)}{p(p-q)}=\int_{y}^{\infty}e^{-p(s-y)}\bar{f}(p,\,s)\,ds.$$

Comme $s - y > 0$, le théorème de translation de l'original implique

$$e^{-p(s-y)}\bar{f}_1(p,\,s)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x>s-y, \\ f(x+y-s,\,s) & \text{pour } x>s-y. \end{cases} \qquad (15.55)$$

En groupant les formules (15.54) et (15.55), on aura

$$\frac{\bar{f}(p,\,q)}{p-q}-\frac{q\bar{f}(p,\,p)}{p(p-q)}=\int_{y}^{x+y}f(x+y-s,\,s)\,ds=\int_{0}^{x}f(x-s,\,y+s)\,ds.$$

Donc, la solution cherchée est

$$u(x,\,y)=a(x+y)+\int_{0}^{x}f(x-s,\,y+s)\,ds.$$

On remarquera que la solution de l'équation (15.48) aurait pu être exprimée à l'aide de la fonction $b(x)$.

3°. Etudions l'équation des vibrations de la corde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\,y),\quad x\in\,]0,\,\infty[,\quad y\in\,]0,\,\infty[. \qquad (15.56)$$

Pour appliquer la méthode opérationnelle, donnons-nous les valeurs

$$\begin{aligned} u(0,\,y)&=a(y)=\bar{a}(q),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}&=c(y)=\bar{c}(q),\\ u(x,\,0)&=b(x)=\bar{b}(p),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}&=d(x)=\bar{d}(p). \end{aligned} \qquad (15.57)$$

On a comme toujours

$$u(x,\,y)=\bar{u}(p,\,q);\quad f(x,\,y)=\bar{f}(p,\,q). \qquad (15.58)$$

Par ailleurs, pour conserver à la fonction $u(x,\,y)$ sa continuité en l'origine des coordonnées, on supposera que $a(0) = b(0)$. Dans les notations (15.57) et (15.58), l'équation opérationnelle s'écrit

$$p^2\{\bar{u}(p,\,q)-\bar{a}(q)\}-p\bar{c}(q)-q^2\{\bar{u}(p,\,q)-\bar{b}(p)\}+q\bar{d}(p)=\bar{f}(p,\,q),$$

d'où

$$\bar{u}(p, q)=\frac{\bar{f}(p, q)+p\bar{c}(q)-q\bar{d}(p)+p^2\bar{a}(q)-q^2\bar{b}^2(p)}{p^2-q^2}. \qquad (15.59)$$

Utilisons l'analyticité de la fonction $\bar{u}(p, q)$ pour établir lesquelles des fonctions a, b, c et d seront indépendantes entre elles. Pour $p = q$, le numérateur de (15.59) doit être nul. Donc,

$$\bar{f}(p, p)+p\bar{c}(p)-p\bar{d}(p)+p^2\{\bar{a}(p)-\bar{b}(p)\}=0.$$

Mettons cette égalité sous la forme

$$\frac{\bar{f}(p, p)}{p}+\bar{c}(p)-\bar{d}(p)+p\{\bar{a}(p)-a(0)\}-p\{\bar{b}(p)-b(0)\}=0. \qquad (15.60)$$

En passant aux fonctions, on aura

$$\int_0^x f(x-s, s)\,ds-c(x)-d(x)+\frac{\partial}{\partial x}\{a(x)-b(x)\}=0,$$

d'où il suit que l'une des quatre fonctions a, b, c et d est définie par les autres. On constate que dans l'égalité (15.59), on peut passer des opérateurs aux fonctions sans calculer préalablement $\bar{a}(p)$, $\bar{b}(p)$, $\bar{c}(p)$ et $\bar{d}(p)$ et sans recourir à la formule d'inversion. En effet, en retranchant le second membre de (15.60) multiplié par q, du numérateur du second membre de (15.59), on aura

$$\bar{u}(p, q)=\frac{p\bar{f}(p, q)-q\bar{f}(p, p)}{p(p^2-q^2)}+\frac{p\bar{c}(q)-q\bar{c}(p)}{p^2-q^2}+$$
$$+p\left\{\frac{p\bar{a}(q)-q\bar{a}(p)}{p^2-q^2}\right\}+\frac{q\bar{b}(p)}{p+q}. \qquad (15.61)$$

Les formules (14.53) et (14.56) donnent

$$\frac{p\bar{c}(q)-q\bar{c}(p)}{p^2-q^2}=\int_0^{\min(x, y)} c(x+y-2s)\,ds.$$

En mettant la troisième fraction de (15.61) sous la forme

$$p\left[\frac{p\bar{a}(q)-q\bar{a}(p)}{p^2-q^2}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{p\bar{a}(q)-p\bar{a}(p)}{p-q}+\frac{1}{2}\,\frac{p}{p+q}\,\bar{a}(q)-\frac{1}{2}\,p\bar{a}(p)$$

et en utilisant les formules (14.56), (14.57) et (14.58), on obtient

$$p\left[\frac{p\bar{a}(q)-q\bar{a}(p)}{p^2-q^2}\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}\{a(x+y)+a(y-x)\} & \text{pour } y>x,\\ \frac{1}{2}\{a(x+y)-a(x-y)\} & \text{pour } y<x.\end{cases}$$

On a enfin pour la quatrième fraction

$$\frac{q\bar{b}(p)}{p+q}=e^{-py}\bar{b}(p)=\begin{cases}b(x-y) & \text{pour } x>y,\\ 0 & \text{pour } x<y.\end{cases}$$

Donc, la solution cherchée s'écrit

$$u(x, y) = \int_0^{\min(x, y)} dx \int_0^{x-s} f(x-s-t,\ y-s+t)\, dt + \int_0^{\min(x, y)} \times$$

$$c(x+y-2s)\, ds + \frac{1}{2}\, a(x+y) + \begin{cases} \frac{1}{2}\, a(y-x) & \text{pour } x < y, \\ b(x-y) - \frac{1}{2}\, a - y) & \text{pour } x > y. \end{cases} \tag{15.62}$$

4°. Etudions l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in]0, \infty[, \quad y \in]0, \infty[. \tag{15.63}$$

Supposons que $u(x, y)$ vérifie la condition initiale

$$u(x, 0) = a(x) = \bar{a}(p) \tag{15.64}$$

et l'une des deux conditions aux limites

$$u(0, y) = b(y) = \bar{b}(q) \tag{15.65}$$

ou

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = c(y) = \bar{c}(q). \tag{15.66}$$

La forme opérationnelle de l'équation (15.63) est

$$p^2 [\bar{u}(p, q) - \bar{b}(q)] = p\bar{c}(q) - q[\bar{u}(p, q) - \bar{a}(p)] = \bar{f}(p, q),$$

d'où

$$\bar{u}(p, q) = \frac{\bar{f}(p, q) - qa(p) + p\bar{c}(q) + p^2\bar{b}(q)}{p^2 - q}. \tag{15.67}$$

Le dénominateur de la fraction de (15.67) possède deux racines: $p = \sqrt{q}$ et $p = -\sqrt{q}$. On se limitera à l'étude de la racine $p = \sqrt{q}$. A remarquer qu'en vertu de l'analyticité de $\bar{u}(p, q)$, le numérateur de (15.67) doit posséder $p = \sqrt{q}$ pour racine sinon cette analyticité serait violée pour $p^2 = q$. Donc,

$$\bar{f}(\sqrt{q}, q) - q\bar{a}(\sqrt{q}) + \sqrt{q}\,\bar{c}(q) + q\bar{b}(q) = 0. \tag{15.68}$$

Cette relation lie les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$, de sorte que deux seulement peuvent être choisies arbitrairement. Soit, par exemple, à calculer la fonction $b(x)$, $a(x)$ et $c(x)$ étant connues. Tirons $\bar{b}(p)$ de (15.68)

$$\bar{b}(p) = -\frac{\bar{f}(\sqrt{p}, p)}{p} + \bar{a}(\sqrt{p}) - \frac{\bar{c}(p)}{\sqrt{p}}. \tag{15.69}$$

La formule (15.8) entraîne

$$\frac{\bar{f}(\sqrt{p}, p)}{p} = \int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi (x-t)}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt. \tag{15.70}$$

On sait que

$$\bar{a}(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} a(s)\, ds. \tag{15.71}$$

Les formules

$$\frac{\bar{c}(p)}{\sqrt{p}} = \sqrt{p} \int_0^\infty e^{-ps} c(s)\, ds$$

et

$$e^{ps} \sqrt{p} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < s, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi (x-s)}} & \text{pour } x > s, \end{cases}$$

entraînent

$$\frac{\bar{c}(p)}{\sqrt{p}} = \int_0^x \frac{c(s)}{\sqrt{\pi (x-s)}}\, ds. \tag{15.72}$$

En portant (15.70), (15.71) et (15.72) dans (15.69), on obtient

$$b(x) = -\int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\pi \sqrt{x-t}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} a(s)\, ds - \int_0^x \frac{c(s)}{\sqrt{\pi (x-s)}}\, ds. \tag{15.73}$$

On calculerait de façon analogue n'importe quelle fonction $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$, lorsque les deux autres sont connues.

5°. Calculons enfin la solution $u(x, y)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in]0, \infty[, \ y \in]0, \infty[, \tag{15.74}$$

qui vérifie les conditions

$$u(x, 0) = 0, \tag{15.75}$$

$$u(0, 0) = \vartheta_0, \tag{15.76}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} - a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \tag{15.77}$$

et qui tend vers 0 lorsque $x \to \infty$ et $y \to \infty$. Au lieu de $u(x, y)$ nous allons chercher son image opérationnelle

$$\bar{u}(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} u(x, y)\, dx\, dy. \tag{15.78}$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p^2 \bar{u}(p, q) - p^2 \bar{u}(0, q) - p\bar{u}_x(0, q), \tag{15.79}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q\bar{u}(p, q) - q\bar{u}(p, 0), \tag{15.80}$$

où

$$\bar{u}(0, q) = q \int_0^\infty e^{-qy} u(0, y)\, dy, \tag{15.81}$$

$$\bar{u}_x(0, q) = q \int_0^\infty e^{-qy} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} dy, \tag{15.82}$$

$$\bar{u}(p, 0) = p \int_0^\infty e^{-px} u(x, 0)\, dx. \tag{15.83}$$

Les égalités (15.80), (15.75) et (15.83) entraînent

$$\frac{\partial u}{\partial y} = q\bar{u}(p, q). \tag{15.84}$$

Pour obtenir l'image opérationnelle de l'équation (15.74), donnons-nous des conditions aux limites « subsidiaires » :

$$u(0, y) = b(y) \tag{15.85}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = c(y). \tag{15.86}$$

Les égalités (15.79) et (15.80) donnent alors

$$p^2\bar{u}(p, q) - p^2\bar{b}(q) - p\bar{c}(q) = q\bar{u}(p, q),$$

d'où il suit

$$\bar{u}(p, q) = \frac{p\{p\bar{b}(q) + \bar{c}(q)\}}{p^2 - q}. \tag{15.87}$$

Compte tenu de la condition (15.75), on déduit

$$q \int_0^\infty e^{-qy} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} dy = q^2 \int_0^\infty e^{-qy} u(0, y)\, dy - qu(0, 0) = q\bar{b}(q) - q\vartheta_0.$$

La dernière égalité donne, eu égard aux conditions (15.77) et (15.86),

$$q\bar{b}(q) - q\vartheta_0 = a\bar{c}(q),$$

d'oú il suit

$$\bar{c}(q)=\frac{q\{\bar{b}(q)-\vartheta_0\}}{a}. \tag{15.88}$$

En portant (15.88) dans (15.87), on obtient

$$\bar{u}(p, q)=\frac{p(ap+q)\bar{b}(q)-pq\vartheta_0}{a(p^2-q)}. \tag{15.89}$$

Comme dans le cas précédent, l'analyticité de la fonction $u(p, q)$ entraîne

$$(a\sqrt{q}+q)\bar{b}(q)-q\vartheta_0=0,$$

d'où

$$\bar{b}(q)=\frac{q\vartheta_0}{\sqrt{q}(\sqrt{q}+a)}. \tag{15.90}$$

En portant (15.90) dans (15.89), on obtient

$$\bar{u}(p, q)=\vartheta_0\frac{pq}{\sqrt{q}(\sqrt{q}+a)(p+\sqrt{q})}. \tag{15.91}$$

La relation opérationnelle

$$\frac{p}{p+a}=e^{-ax},$$

entraîne

$$\bar{u}(x, q)=\vartheta_0\frac{q}{\sqrt{q}(\sqrt{q}+a)}e^{-\sqrt{q}x}. \tag{15.92}$$

Compte tenu de l'égalité

$$\frac{q}{\sqrt{q}(\sqrt{q}+a)}=\frac{q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}-\frac{1}{\sqrt{q}+a}\right)$$

et des relations opérationnelles

$$\sqrt{q}\,e^{-\alpha\sqrt{q}}=\chi(\alpha, y), \tag{15.93}$$

$$\frac{qe^{-\alpha\sqrt{q}}}{\sqrt{q}+a}=\chi(\alpha, y)-ae^{\alpha a+a^2y}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{y}}+a\sqrt{y}\right), \tag{15.94}$$

où

$$\chi(\alpha, y)=\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4y}}}{\sqrt{\pi y}},\quad \operatorname{erfc}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-\xi^2}d\xi=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\xi^2}d\xi,$$

on obtient la solution cherchée

$$u(x, y)=\vartheta_0\left\{e^{ax+a^2y}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+a\sqrt{y}\right)\right\}. \tag{15.95}$$

Il est évident que $u(x, y)\to 0$ lorsque $x\to\infty$ et $y\to\infty$.

§ 16. Calcul opérationnel de fonctions de deux arguments entiers

1. Corps d'opérateurs. Le calcul opérationnel de fonctions de deux variables entières peut être conçu comme au § 9 pour le cas d'une variable. Une autre méthode de justification du calcul opérationnel de fonctions d'argument entier consiste à introduire l'analogue discret du produit de convolution. C'est cette approche que l'on développera ici ; l'exposé n'est pas rattaché aux paragraphes précédents.

Soit S l'ensemble de toutes les fonctions $f(x, y)$ d'arguments entiers non négatifs x et y à valeurs complexes ou réelles. Les fonctions seront notées $f(x, y)$ ou $f(m, n)$, $f(\mu, \nu)$, où x, y, m, n, μ, ν sont des entiers non négatifs. L'ensemble S est un espace vectoriel pour les opérations ordinaires d'addition et de multiplication par un nombre.

On appelle *produit de convolution* des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ de S, la fonction

$$h(x, y) = \sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y} f(x-\nu, y-\mu)\, g(\nu, \mu).$$

Il est aisé de vérifier que le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif relativement à l'addition.

Désignons par ∇_x et ∇_y des opérateurs linéaires définis sur l'ensemble S par

$$\nabla_x f(x, y) = f(x, y) - f(x-1, y),$$

$$\nabla_y f(x, y) = f(x, y) - f(x, y-1),\quad x \geqslant 1,\ y \geqslant 1 .$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$ on supposera que

$$\nabla_x f(x, y)\,|_{x=0} = f(0, y)$$

$$\nabla_y f(x, y)\,|_{y=0} = f(x, 0).$$

Munissons l'ensemble S du produit.

Définition 1. *On appelle produit des fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ de S, la fonction*

$$h(x, y) = \nabla_x \nabla_y \sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y} f(x-\nu, y-\mu)\, g(x, \mu).$$

On a, de toute évidence,

$$h(0, 0) = f(0, 0)\, g(0, 0),$$

$$h(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{x} f(x-\nu, 0)\, g(\nu, 0) - \sum_{\nu=0}^{x-1} f(x-1-\nu, 0)\, g(\nu, 0),$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$h(0, y) = \sum_{\mu=0}^{y} f(0, y-\mu) g(0, \mu) - \sum_{\mu=0}^{y-1} f(0, y-1-\mu) g(0, \mu),$$

$$y = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$h(x, y) = \sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y} f(x-\nu, y-\mu) g(\nu, \mu) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{x-1} \sum_{\mu=0}^{y} f(x-1-\nu, y-\mu) g(\nu, \mu) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y-1} f(x-\nu, y-1-\mu) g(\nu, \mu) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{x-1} \sum_{\mu=0}^{y-1} f(x-1-\nu, y-1-\mu) g(\nu, \mu),$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots; \quad y = 1, 2, 3, \ldots.$$

On notera ce produit par $*$, i.e.

$$f(x, y) * g(x, y) = h(x, y). \tag{16.1}$$

P r o p r i é t é s f o n d a m e n t a l e s d u p r o d u i t

1. *Le produit est commutatif, i.e.*

$$f(x, y) * g(x, y) = g(x, y) * f(x, y).$$

2. *Si $f(x, y) = c$ est une constante,*

$$c * g(x, y) = cg(x, y).$$

3. *Si la fonction $f(x, y)$ dépend seulement de x, i.e. $f(x, y) = f(x)$ et $g(x, y)$ seulement de y, i.e. $g(x, y) = g(y)$,* on a

$$f(x, y) * g(x, y) = f(x) g(y).$$

Dans ce cas le produit de convolution est confondu avec le produit ordinaire de fonctions.

Cette propriété découle immédiatement de la définition du produit.

4. *Si $f(x, y) = f(x)$ et $g(x, y) \in S$ est une fonction quelconque, le produit $f(x) * g(x, y) = h(x, y)$ est de la forme*

$$h(0, y) = f(0) g(0, y), \quad y = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$h(x, y) = \sum_{\nu=0}^{x} f(x-\nu) g(\nu, y) - \sum_{\nu=0}^{x-1} f(x-1-\nu) g(\nu, y),$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots, \quad y = 0, 1, 2, \ldots.$$

La dernière relation donne, en particulier,

$$x * g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x=0;\ y=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{x-1} g(\nu, y) & \text{pour } x=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ y=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \end{cases} \tag{16.2}$$

De façon analogue, on a

$$y * g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y=0;\ x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \sum\limits_{\mu=0}^{y-1} g(x, \mu) & \text{pour } y=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{cases} \tag{16.3}$$

et enfin 1276 5

$$xy * g(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{x-1} \sum\limits_{\mu=0}^{y-1} g(\nu, \mu) & \text{pour } x \geqslant 1,\ y \geqslant 1, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{16.4}$$

5. *Le produit est associatif, i.e.*

$$[f(x, y) * g(x, y)] * h(x, y) = f(x, y) * [g(x, y) * h(x, y)].$$

6. *Le produit est distributif, i.e.*

$$[f(x, y) + g(x, y)] * h(x, y) = f(x, y) * h(x, y) + g(x, y) * h(x, y).$$

L'ensemble S muni de la somme ordinaire de fonctions et du produit (16.2) est un anneau commutatif. Cet anneau est un anneau d'intégrité. Ce qu'on notera par la propriété suivante.

7. *Si*

$$f(x, y) * g(x, y) = h(x, y) = 0$$

où x et y sont non négatifs et $g(x, y)$ une fonction non identiquemen nulle, alors $f(x, y) = 0$ quels que soient x et y.

D é m o n s t r a t i o n. Soit m et n un couple d'entiers, tels que $g(m, n) \neq 0$ et $g(p, q) = 0$ pour tous les $p \in [0, m]$, $q \in$t $\in [0, n]$ et $p + q < m + n$. (Si $m = n = 0$, l'ensemble de couples (p, q) est vide.) Supposons que

$$f(x, y) * g(x, y) = h(x, y) = 0, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,$$

alors

$$\sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y} h(\nu, \mu) = 0, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

D'où il suit que si l'on remplace $h(x, y)$ par le produit $f(x, y) *$ $* g(x, y)$ et l'on effectue les calculs nécessaires, on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{x} \sum_{\mu=0}^{y} f(x-\nu, y-\mu) g(\nu, \mu) = 0, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \tag{16.5}$$

ou compte tenu de la définition du couple (m, n)

$$\sum_{\nu=m}^{x} \sum_{\mu=n}^{y} f(x-\nu, y-\mu) g(\nu, \mu) = 0 \tag{16.6}$$

En posant $x = m$, $y = n$, on obtient $f(0, 0) g(m, n) = 0$, d'où $f(0, 0) = 0$. En faisant $y = n$ dans (16.6), on déduit

$$\sum_{\nu=m}^{x} f(x-\nu, 0) g(\nu, n) = 0 \tag{16.7}$$

Supposons que $f(x, 0) = 0$ pour $x \in]0, p[$. Alors pour $x = p + m$ on déduit de (16.7) que $f(p, 0) g(m, n) = 0$, d'où $f(p, 0) = 0$. Donc, pour tous les $x \geqslant 0$, on a $f(x, 0) = 0$. En posant $y = n + 1$ dans (16.6), on trouve

$$\sum_{\nu=m}^{x} \sum_{\mu=n}^{n+1} f(x-\nu, n+1-\mu) g(\nu, \mu) =$$

$$= \sum_{\nu=m}^{x} f(x-\nu, 1) g(\nu, n) + \sum_{\nu=m}^{x} f(x-\nu, 0) g(\nu, n+1) =$$

$$= \sum_{\nu=m}^{x} f(x-\nu, 1) g(\nu, n) = 0.$$

En reprenant les raisonnements précédents, on conclut que la fonction $f(x, q) = 0$ pour tous les $x \geqslant 0$ et quel que soit q, i.e. est identiquement nulle. ■

Notons $R(S)$ l'extension de l'anneau S à un corps de quotients et appelons opérateurs ses éléments. Le corps $R(S)$ contient, en particulier, les opérateurs $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$. Introduisons les notations

$$\sigma = \frac{1}{x}, \quad \tau = \frac{1}{y}. \tag{16.8}$$

Voyons à quelles conditions doit satisfaire une fonction $f(x, y) \in S$ pour que le produit $\sigma * f(x, y)$ appartienne également à S. Soit

$$\sigma * f(x, y) = h(x, y) \in S,$$

alors la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma} * h(x, y) = x * h(x, y).$$

D'où il suit (cf. (16.2)) que $f(0, y) = 0$ lorsque $y = 0, 1, 2, \ldots$ Inversement, si cette condition est remplie, on obtient

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{x-1} [f(\nu+1, y) - f(\nu, y)].$$

En supposant que $f(\nu + 1, y) - f(\nu, y) = h(\nu, y)$, on obtient

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{x-1} h(x, y),$$

donc

$$f(x, y) = x * h(x, y)$$

d'où

$$h(x, y) = \sigma * f(x, y) \in S.$$

De façon analogue, on conclut que le produit $\tau * f(x, y)$ appartiendra à l'anneau S si seulement $f(x, 0) = 0$ pour $x = 0, 1, 2, \ldots$ Donc, on est conduit au

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $\sigma * f(x, y)$ appartienne à S est que $f(0, y) = 0$ quel que soit y. De façon analogue, une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $\tau * f(x, y)$ appartienne à S est que $f(x, 0) = 0$ quel que soit x.*

2. Calcul d'opérateurs. Posons

$$f(x+1, y) - f(x, y) = \Delta_x f(x, y), \tag{16.9}$$

$$f(x, y+1) - f(x, y) = \Delta_y f(x, y), \tag{16.10}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sigma * [f(x, y) - f(0, y)] &= \Delta_x f(x, y), \\ \tau * [f(x, y) - f(x, 0)] &= \Delta_y f(x, y). \end{aligned} \tag{16.11}$$

Les égalités (16.9), (16.10) et (16.11) entraînent

$$\sigma\tau * [f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)] = \Delta_x \Delta_y f(x, y) \tag{16.12}$$

Si $f(x, 0) = f(0, y)$ pour tous les $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, on obtient la relation

$$\sigma\tau * f(x, y) = \Delta_x \Delta_y f(x, y). \tag{16.13}$$

De (16.11) on déduit que

$$\sigma * [\Delta_x f(x, y) - \Delta_x f(0, y)] = \Delta_x^2 f(x, y),$$

d'où il vient, compte tenu de (16.11),

$$\sigma\{\sigma [f(x, y) - f(0, y)] - \Delta_x f(0, y)\} = \Delta_x^2 f(x, y),$$

ou

$$\Delta_x^2 f(x, y) = \sigma^2 f(x, y) - \sigma^2 f(0, y) - \sigma \Delta_x f(0, y). \tag{16.14}$$

De façon analogue,

$$\Delta_y^2 f(x, y) = \tau^2 f(x, y) - \tau^2 f(x, 0) - \tau\Delta_y f(x, 0). \quad (16.15)$$

Les égalités (16.14) et (16.15) entraînent

$$(\Delta_x^2 + \Delta_y^2) f(x, y) = (\sigma^2 + \tau^2) f(x, y) - \sigma^2 f(0, y) - \\ - \tau^2 f(x, 0) - \sigma\Delta_x f(0, y) - \tau\Delta_y f(x, 0). \quad (16.16)$$

Posons

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1), \quad x^{(0)} = 1, \quad 0^{(0)} = 1,$$
$$y^{(m)} = y(y-1)(y-2)\ldots(y-m+1), \quad y^{(0)} = 1, \quad 0^{(0)} = 1.$$

Dans ces notations on obtient $\Delta_x x^{(n)} = nx^{(n-1)}$. Comme $x^{(n)}|_{x=0} = 0$, lorsque $n > 0$, on déduit de (16.11) que

$$\sigma x^{(n)} = \Delta_x x^{(n)} = nx^{(n-1)}$$

d'où

$$\sigma^n x^{(n)} = n!$$

ou

$$\frac{1}{\sigma^n} = \frac{x^{(n)}}{n!} \quad (16.17)$$

et visiblement

$$\frac{1}{\tau^m} = \frac{y^{(m)}}{m!}. \quad (16.18)$$

Definition 2. *Supposons que*

$$\eta_{m,n}(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } x \geqslant m, \ y \geqslant n, \\ 0 & \textit{dans les autres cas,} \end{cases}$$

$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } x \geqslant k \\ 0 & \textit{pour } x < k, \quad \eta_0(x) \equiv 1. \end{cases}$$

On a visiblement

$$\eta_{m,n}(x, y) = \eta_m(x)\,\eta_n(y).$$

La propriété 3 entraîne

$$\eta_{m,n}(x) = \eta_m(x) * \eta_n(y).$$

Il est aisé de vérifier que

$$\eta_m(x) * \eta_{m_1}(x) = \eta_{m+m_1}(x), \quad (16.19)$$

donc

$$\eta_{m,n}(x, y) * \eta_{m_1,n_1}(x, y) = \eta_m(x) * \eta_{m_1}(x) * \eta_n(y) * \eta_{n_1}(y) = \\ = \eta_{m+m_1}(x) * \eta_{n+n_1}(y) = \eta_{m+m_1,\,n+n_1}(x, y),$$

i.e.

$$\eta_{m,n}(x, y) * \eta_{m_1,n_1}(x, y) = \eta_{m+m_1,\,n+n_1}(x, y). \quad (16.20)$$

On a, par ailleurs,

$$(1+\sigma)\,\eta_1(x) = \eta_1(x) + \sigma\eta_1(x) = \eta_1(x) + \Delta_x\eta_1(x) = \eta_1(1+x),$$

or

$$\eta_1(x+1) \equiv 1, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

ainsi,

$$\eta_1(x) = \frac{1}{1+\sigma}. \tag{16.21}$$

En tenant compte de la formule (16.19), on déduit

$$\eta_m(x) = \eta_1(x) * \eta_1(x) * \ldots * \eta_1(x) = \eta_1^m(x),$$

donc,

$$\eta_m(x) = \frac{1}{(1+\sigma)^m}. \tag{16.22}$$

De facon analogue, on a

$$\eta_n(y) = \frac{1}{(1+\tau)^n},$$

par conséquent,

$$\eta_{m,\,n}(x,\ y) = \frac{1}{(1+\sigma)^m\,(1+\tau)^n}. \tag{16.23}$$

Considérons la série double

$$\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\nu,\ \mu)}{(1+\sigma)^{\nu}\,(1+\tau)^{\mu}} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f(\nu,\ \mu) \left[\left(\frac{1}{(1+\sigma)^{\nu}} - \frac{1}{(1+\sigma)^{\nu+1}} \right) \left(\frac{1}{(1+\tau)^{\mu}} - \frac{1}{(1+\tau)^{\mu+1}} \right) \right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f(\nu,\ \mu)\,[\eta_{\nu,\,\mu}(x,\ y) - \eta_{\nu+1,\,\mu}(x,\ y) -$$

$$- \eta_{\nu,\,\mu+1}(x,\ y) + \eta_{\nu+1,\,\mu+1}(x,\ y)] = f(x,\ y)$$

i.e.

$$\bar{f}(\sigma,\ \tau) = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\nu,\ \mu)}{(1+\sigma)^{\nu}\,(1+\tau)^{\mu}} = f(x,\ y). \tag{16.24}$$

Etablissons quelques formules analogues à celles du calcul opérationnel à deux variables (cf. § 14).

a) Soit la fonction

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq y, \\ f(x) & \text{pour } x = y, \end{cases}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée de l'argument entier x. On a

$$f(x, y) = \bar{f}(\sigma, \tau) = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\nu}} =$$

$$= \frac{\sigma\tau}{1+\sigma+\tau+\sigma\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma+\tau+\sigma\tau)^{\nu}},$$

Comme

$$\bar{f}(\sigma) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma)^{\nu}}, \tag{16.25}$$

il vient

$$\frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau+\sigma\tau} \bar{f}(\sigma+\tau+\sigma\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y, \\ f(x) & \text{si } x = y. \end{cases} \tag{16.26}$$

En particulier, la formule (16.26) entraîne pour $f(x) \equiv 1$

$$\frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau+\sigma\tau} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ pour } x \neq y, \\ 1 \text{ pour } x = y \end{array} \right\} = \delta_{xy}. \tag{16.27}$$

b) Supposons maintenant que $m = \min(x, y)$, et $f(x)$ est une fonction donnée.

Posons $f(x, y) = f(m)$. Il vient

$$f(m) = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{f(\mu)}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\mu}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\mu}} \right\} =$$

$$= \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(1+\tau)^{\mu}} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \frac{1}{(1+\sigma)^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma)^{\nu}} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\tau)^{\mu}} \right\} = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(1+\sigma)^{\mu}(1+\tau)^{\mu}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(1+\tau)^{\mu}} \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\sigma)^{\nu}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma)^{\nu}} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\tau)^{\mu}} \right\} =$$

$$= \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\mu)}{(1+\sigma)^{\mu}(1+\tau)^{\mu}} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\mu)}{\sigma(1+\sigma)^{\mu}(1+\tau)^{\mu}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{\tau(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\nu}} \right\} = \frac{\sigma+\tau+\sigma\tau}{1+\sigma+\tau+\sigma\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\nu)}{(1+\sigma+\tau+\sigma\tau)^{\nu}}.$$

En tenant compte de (16.25), on obtient

$$\bar{f}(\sigma+\tau+\sigma\tau)=f(m). \qquad (16.28)$$

c) Supposons que la fonction $f(x, y) = f(x+y)$. On a

$$f(x+y)=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{f(\nu+\mu)}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\mu}}=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{l=0}^{\infty}f(l)\sum_{\nu+\mu=l}\frac{1}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\mu}}=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{l=0}^{\infty}f(l)\sum_{\mu=0}^{l}\frac{1}{(1+\sigma)^{l-\mu}(1+\tau)^{\mu}}=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f(l)}{(1+\sigma)^{l}}\frac{1-\left(\frac{1+\sigma}{1+\tau}\right)^{l+1}}{1-\frac{1+\sigma}{1+\tau}}=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(\tau-\sigma)}\sum_{l=0}^{\infty}f(l)\left[\frac{1}{(1+\sigma)^{l}}-\frac{1+\sigma}{(1+\tau)^{l+1}}\right]=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{\tau-\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}f(l)\left[\frac{1}{(1+\sigma)^{l+1}}-\frac{1}{(1+\tau)^{l+1}}\right].$$

En tenant de nouveau compte de l'égalité (16.25), on obtient

$$\frac{\sigma\bar{f}(\tau)-\tau\bar{f}(\sigma)}{\sigma-\tau}=f(x+y). \qquad (16.29)$$

Signalons encore deux relations fonctionnelles générales susceptibles d'être utiles dans le calcul des opérateurs. Posons

$$\bar{f}(\sigma, \tau)=f(x, y), \quad \bar{g}(\sigma, \tau)=g(x, y).$$

On obtient alors (cf. (16.24))

$$\frac{(1+\sigma)(1+\tau)}{\sigma\tau}\bar{f}(\sigma, \tau)\bar{g}(\sigma, \tau)=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{f(\nu, \mu)g(p, q)}{(1+\sigma)^{\nu+p}(1+\tau)^{\mu+q}}=$$

$$=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\sigma)^{n}(1+\tau)^{m}}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}f(n-p, m-q)g(p, q).$$

D'où il suit

$$\frac{(1+\sigma)(1+\tau)}{\sigma\tau}\bar{f}(\sigma, \tau)\bar{g}(\sigma, \tau)=\sum_{\nu=0}^{x}\sum_{\mu=0}^{y}f(x-\nu, y-\mu)g(\nu, \mu). \qquad (16.30)$$

De facon analogue, on établit que

$$\frac{\bar{f}(\sigma,\tau)\bar{g}(\sigma,\tau)}{\sigma\tau}=\begin{cases}\sum_{\nu=0}^{x-1}\sum_{\mu=0}^{y-1} f(x-\nu-1,\ y-1-\mu)\,g(\nu,\mu) \\ \qquad\qquad \text{pour } x\geqslant 1,\ y\geqslant 1, \\ 0 \text{ dans les autres cas.}\end{cases}\tag{16.31}$$

En supposant que $f(x, y) = (1+\alpha)^x$ et $f(x, y) = (1+\beta)^y$ dans les formules (16.11), on obtient

$$\sigma\,[(1+\alpha)^x - 1] = [(1+x)^{x+1} - (1+\alpha)^x] = \alpha\,(1+\alpha)^x,$$

ou

$$(\sigma-\alpha)\,(1+\alpha)^x = \sigma.$$

En procédant de façon analogue on obtiendrait la formule

$$(\tau-\beta)\,(1+\beta)^y = \tau.$$

Donc,

$$\frac{\sigma}{\sigma-\alpha}=(1+\alpha)^x,\tag{16.32}$$

$$\frac{\tau}{\tau-\beta}=(1+\beta)^y.\tag{16.33}$$

Une dérivation des dernières égalités par rapport à α et β donne

$$\frac{\sigma}{(\sigma-\alpha)^{n+1}}=\frac{x^{(n)}}{n!}(1+\alpha)^{x-n},\tag{16.34}$$

$$\frac{\tau}{(\tau-\beta)^{n+1}}=\frac{y^{(n)}}{n!}(1+\beta)^{y-n}.\tag{16.35}$$

En supposant que $f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}$ dans (16.24), on obtient

$$\bar{f}(\sigma)=\frac{\sigma}{\sigma+1}e^{\frac{\lambda}{1+\sigma}}=\frac{\lambda^x}{x!}.$$

D'où il suit

$$\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}e^{-\frac{\lambda\sigma}{1+\sigma}-\frac{\mu\tau}{1+\tau}}=\frac{\lambda^x\mu^y}{x!\,y!}e^{-\lambda-\mu}.\tag{16.36}$$

Sous réserve de la convergence des intégrales, la formule (16.36) entraîne

$$\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda\sigma}{1+\sigma}-\frac{\mu\tau}{1+\tau}}\Phi(\lambda,\ \mu)\,d\lambda\,d\mu=$$

$$\frac{1}{x!\,y!}\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda^x\mu^y e^{-\lambda-\mu}\Phi(\lambda,\ \mu)\,d\lambda\,d\mu.\tag{16.37}$$

Si l'on pose $\Phi(\lambda, \mu) = \Phi(\lambda\mu)$ dans (16.37), le premier membre de (16.37) se ramène à la forme

$$\frac{2\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\int_0^\infty \Phi(\xi) K_0\left[2\sqrt{\frac{\sigma\tau\xi}{(1+\sigma)(1+\tau)}}\right] d\xi,$$

et le second à

$$\frac{2}{x!\,y!}\int_0^\infty \xi^{\frac{x+y}{2}} K_{x-y}(2\sqrt{\xi})\,\Phi(\xi)\,d\xi.$$

Dans les deux cas on s'est servi de l'égalité

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\gamma x-\frac{\beta}{x}} dx = 2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}).$$

On a, donc

$$\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)}\int_0^\infty \Phi(\xi) K_0\left[2\sqrt{\frac{\sigma\tau\xi}{(1+\sigma)(1+\tau)}}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{x!\,y!}\int_0^\infty \Phi(\xi)\,\xi^{\frac{x+y}{2}} K_{x-y}(2\sqrt{\xi})\,d\xi, \quad (16.38)$$

ou

$$\int_0^\infty \Phi\left[\frac{(1+\sigma)(1+\tau)}{\sigma\tau}\,t\right] K_0(2\sqrt{t})\,dt =$$

$$= \frac{1}{x!\,y!}\int_0^\infty \Phi(\xi)\,\xi^{\frac{x+y}{2}} K_{x-y}(2\sqrt{\xi})\,d\xi. \quad (16.39)$$

Les formules (16.37) et (16.38) peuvent être utilisées pour dresser les tables de valeurs des opérateurs $\bar{f}(\sigma, \tau)$. Posons

$$e^{-\frac{\xi}{\sigma}} = L_x(\xi), \quad e^{-\frac{\eta}{\tau}} = L_y(\eta). \quad (16.40)$$

On a visiblement

$$L_x(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \xi^n}{n!}\,\frac{1}{\sigma^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \xi^n}{n!}\cdot\frac{x^{(n)}}{n!}.$$

Etant donné que x est un entier et $x^{(n)} = 0$ lorsque $n > x$, l'expression du polynôme de Laguerre de puissance x s'écrit:

$$L_x(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \xi^n}{n!}\,\frac{x^n}{n!}.$$

On sait [2] que ces polynômes forment un système orthonormé de poids $e^{-\xi}$ sur l'intervalle $]0, \infty[$. Cette propriété découle immédiatement de la formule (16.26). En effet,

$$\int_0^\infty L_x(\xi) L_y(\xi) e^{-\xi} d\xi = \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\sigma}-\frac{\xi}{\tau}-\xi} d\xi = \frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau+\sigma\tau} = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

R e m a r q u e. La propriété 3° du produit dans l'anneau S est essentielle.

Soit l'expression (cf. (16.39))

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{\sigma}-\frac{\eta}{\tau}} k(\xi, \eta) d\xi d\eta = F\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}\right),$$

où

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta) e^{-p\xi-q\eta} d\xi d\eta.$$

On peut calculer l'opérateur $F\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}\right)$ en se servant des tables de la transformation de Laplace à deux dimensions. On a

$$F\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty L_x(\xi) L_y(\eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{16.41}$$

Il est aisé d'établir que

$$\frac{1}{\sigma^r} e^{-\frac{\xi}{\tau}} = L_x(\xi; r), \tag{16.42}$$

$$\frac{1}{\tau^s} e^{-\frac{\eta}{\tau}} = L_y(\eta; s), \tag{16.43}$$

$$\int_0^\infty L_x(\xi; r) L_y(\xi; r) \xi^r e^{-\xi} d\xi = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma^r} e^{-\frac{\xi}{\sigma}} \frac{1}{\tau^r} e^{-\frac{\xi}{\tau}} \xi^r e^{-\xi} d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)\sigma r}{(\sigma+\tau+\sigma\tau)^{r+1}} = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ \Gamma(1+r) x^{(r)}, & x = y. \end{cases}$$

L'égalité (16.41) s'écrit:

$$\frac{1}{\sigma^r \tau^s} F\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\tau}\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty L_x(\xi, r) L_y(\eta, s) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{16.44}$$

Il existe une autre méthode de calcul des valeurs de $\overline{f}(\sigma, \tau)$. Supposons comme toujours que $[\xi]$ représente la partie entière de ξ. Si $[\xi] = \nu$ et $[\eta] = \mu$, alors $f([\xi], [\eta]) = f(\nu, \mu)$ pour $\xi \in [\nu, \nu + 1[$, $\eta \in [\mu, \mu + 1[$. Cherchons la transformée de Laplace-

Carson de la fonction $f([\xi], [\eta])$

$$F(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty f([\xi], [\eta]) e^{-p\xi - q\eta} d\xi \, d\eta =$$

$$= pq \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f(\nu, \mu) \int_{\nu}^{\nu+1} \int_{\mu}^{\mu+1} e^{-p\xi - q\eta} d\xi \, d\eta =$$

$$= (e^p - 1)(e^q - 1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f(\nu, \mu) e^{-p(\nu+1)} e^{-q(\mu+1)}.$$

En se servant des formules (cf. (16.21))

$$e^p = \eta_1(x) = \frac{1}{1+\sigma}, \tag{16.45}$$

$$e^{-q} = \eta_1(y) = \frac{1}{1+\tau}, \tag{16.46}$$

on ramène la dernière égalité à la forme

$$F(p, q) = \frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)(1+\tau)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f(\nu, \mu)}{(1+\sigma)^{\nu}(1+\tau)^{\mu}} = \bar{f}(\sigma, \tau). \tag{16.47}$$

Cette formule permet de calculer les valeurs des opérateurs $\bar{f}(\sigma, \tau)$ à l'aide de la table de la transformée de Laplace à deux dimensions et des égalités (16.45).

Penchons-nous sur un autre exemple maintenant. Soit

$$2^{\frac{\xi}{2}} \frac{(1+\sigma-\sqrt{2})^{\xi}\sigma}{(\sqrt{2}+\sigma\sqrt{2}-1)^{\xi+1}} = l_x(\xi). \tag{16.48}$$

On a

$$\sum_{j=0}^{\infty} l_x(j) \, l_y(j) \, 2^{-j} = \sigma\tau \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\sigma-\sqrt{2})^k (1+\tau-\sqrt{2})^k}{(\sqrt{2}+\sigma\sqrt{2}-1)^{k+1}(\sqrt{2}+\tau\sqrt{2}-1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\sigma\tau}{(\sqrt{2}+\sigma\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+\tau\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{(1+\sigma-\sqrt{2})(1+\tau-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sigma\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+\tau\sqrt{2}-1)}} =$$

$$= \frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau+\sigma\tau} = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Si donc l'on assimile le produit scalaire à l'expression

$$(l_n(\xi), \; l_m(\xi)) = \sum_{j=0}^{\infty} l_n(j) \, l_m(j) \, 2^{-j},$$

le système de polynômes $l_0(\xi)$, $l_1(\xi)$, ..., $l_n(\xi)$ sera un système orthonormé. Explicitons les polynômes $l_n(\xi)$. On a

$$l_x(\xi)=\frac{\sigma 2^{\frac{\xi}{2}}(\sigma+1-\sqrt{2})^{\xi}}{2^{\frac{\xi+1}{2}}\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\xi+1}}.$$

Comme

$$\frac{\sigma+1-\sqrt{2}}{\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

l vient

$$l_x(\xi)=\left(1-\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\xi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Donc,

$$l_x(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\xi}(-1)^k\binom{\xi}{k}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\sigma}{\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}},$$

or

$$\frac{\sigma}{(\sigma-\alpha)^{k+1}}=\frac{x^{(k)}}{k!}(1+\alpha)^{x-k};$$

la formule (16.34) entraîne

$$\frac{\sigma}{\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}}=\frac{x^{(k)}}{k!}\left(1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x-k}.$$

Ainsi,

$$l_x(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\xi}(-1)^k\binom{\xi}{k}\frac{x^{(k)}}{k!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ou

$$l_x(\xi)=2^{-\frac{x+1}{2}}\sum_{k=0}^{\xi}(-1)^k\frac{\xi^{(k)}}{k!}\frac{x^{(k)}}{k!}. \tag{16.49}$$

De ce qu'on a démontré il suit que les polynômes

$$l_n(\xi)=2^{-\frac{n+1}{2}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\xi^{(k)}}{k!}$$

vérifient la condition

$$\sum_{j=0}^{\infty} l_n(j)\, l_m(j)\, 2^{-j} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n, \\ 0 \text{ si } m \neq n. \end{cases} \qquad (16.50)$$

Prouvons, enfin, que

$$\sum_{\nu=0}^{x-1} \sum_{\mu=0}^{y-1} f(\nu, \mu)(-1)^{\nu} - (-1)^{\mu} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m+2}} \Delta_x^n \Delta_{my} f(0, 0) - \times$$

$$-(1-)^{[x]} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m+2}} \Delta_x^n \Delta_y^m f(x, 0) -$$

$$-(-1)^{[y]} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m+2}} \Delta_x^n \Delta_y^m f(0, y) +$$

$$+(-1)^{[x]+[y]} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m+2}} \Delta_x^n \Delta_y^m f(x, y). \qquad (16.51)$$

Dans le cas d'une variable, cette formule s'écrit

$$\sum_{k=0}^{t-1} f(k)(-1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Delta^n f(0)}{2^{n+1}} - (-1)^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f(t). \qquad (16.52)$$

En appliquant cette formule par rapport à y, on obtient

$$\sum_{\mu=0}^{y-1} f(x, \mu)(-1)^{\mu} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Delta_y^m f(x, 0)}{2^{m+1}} - (-1)^y \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Delta_y^m f(x, y)}{2^{m+1}}. \qquad (16.53)$$

En appliquant cette même formule par rapport à x à la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{\mu=0}^{y-1} f(x, \mu)(-1)^{\mu},$$

on obtient

$$\sum_{\nu=0}^{x-1}\sum_{\mu=0}^{y-1} f(\nu, \mu)(-1)^{\nu}(-1)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\Delta_x^n\sum_{\mu=0}^{y-1} f(0, \mu)(-1)^{\mu}-$$

$$-(-1)^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\Delta_x^n\sum_{\mu=0}^{y-1} f(x, \mu)(-1)^{\mu}.$$

On déduit la formule (16.51) en remplaçant dans la dernière égalité les sommes $\sum_{\mu=0}^{y-1}$ par leurs expressions (16.53).

3. Calcul de quelques intégrales définies renfermant des polynômes de Laguerre.

1. Montrons que pour $n \leqslant m$, on a

$$\int_0^{\infty} L_n(\xi) L_m(2\xi) e^{-\xi} d\xi=(-1)^{n+m}\binom{m}{n}2^n. \tag{16.54}$$

Remarque. Pour $n > m$ l'intégrale est visiblement nulle. On a (cf. (16.40))

$$L_x(\xi)=e^{-\frac{\xi}{\sigma}} \quad \text{et} \quad L_y(2\xi)=e^{-\frac{2\xi}{\tau}}$$

donc,

$$\int_0^{\infty} L_x(\xi) L_y(2\xi) e^{-\xi} d\xi=\int_0^{\infty} e^{-\xi\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\tau}+1\right)} d\xi,$$

ou

$$\int_0^{\infty} L_x(\xi) L_y(2\xi) e^{-\xi} d\xi=\frac{\sigma\tau}{2\sigma+\tau+\sigma\tau}=\frac{\sigma\tau}{(1+\sigma)\left(\tau+\frac{2\sigma}{1+\sigma}\right)}.$$

Compte tenu de l'égalité (cf. (16.32) et (16.33))

$$\frac{\tau}{\tau+\frac{2\sigma}{1+\sigma}}=\left(1-\frac{2}{1+\sigma}\right)^y=\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)^y,$$

on obtient

$$\int_0^{\infty} L_x(\xi) L_y(2\xi) e^{-\xi} d\xi=(-1)^y\frac{\sigma}{1+\sigma}\left(1-\frac{2}{\sigma+1}\right)^y=$$

$$=(-1)^y\sum_{k=0}^{y}(-1)^k\binom{y}{k}\frac{2^k\sigma}{(1+\sigma)^{k+1}}.$$

Eu égard à la formule (cf. (16.24), (16.29))

$$\frac{\sigma}{(\sigma+1)^k}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\neq k,\\ 1 & \text{si} \quad x=k,\end{cases}$$

on déduit la relation cherchée pour $y \geqslant x$

$$\int_0^\infty L_x(\xi) L_y(2\xi) e^{-\xi} d\xi = (-1)^{x+y} \binom{y}{x} 2^x. \quad \blacksquare$$

2. Prouvons que pour $n \leqslant m$, on a

$$\int_0^\infty L_n(\xi) L_m\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi} d\xi = 2^{-m} \binom{m}{n}. \tag{16.55}$$

De façon analogue à ce qui précède, on obtient

$$\int_0^\infty L_x(\xi) L_y\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi} d\xi = \frac{\sigma\tau}{\frac{\sigma}{2} + \tau(1+\sigma)} = \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(\frac{\tau}{\tau + \frac{\sigma}{2(1+\sigma)}}\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(1 - \frac{\sigma}{2(1+\sigma)}\right)^y = 2^{-y} \frac{\sigma}{1+\sigma}\left(1 + \frac{1}{1+\sigma}\right)^y =$$

$$= 2^{-y} \sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} \frac{\sigma}{(1+\sigma)^{k+1}} = 2^{-y} \binom{y}{x} \quad \text{pour} \quad y \geqslant x. \quad \blacksquare$$

3. Montrons que

$$\int_0^\infty L_n(a\xi) L_m(2\xi) e^{-\xi} d\xi = (-1)^m (1-a)^n \sum_{k=0}^{\min(m,\,n)} \left(\frac{(-2a)}{1-a}\right)^k \binom{m}{k} \binom{n}{k} \tag{16.56}$$

pour $a \neq 1$, $a > 0$.

Comme dans les cas précédents, on obtient

$$\int_0^\infty L_x(a\xi) L_y(2\xi) e^{-\xi} d\xi = \frac{\sigma}{\sigma+a} \frac{\tau}{\tau + \frac{2\sigma}{\sigma+a}} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma+a}\left(1 - \frac{2\sigma}{\sigma+a}\right)^y = (-1)^y \frac{\sigma}{\sigma+a}\left(1 - \frac{2a}{\sigma+a}\right)^y =$$

$$= (-1)^y \sum_{k=0}^{y} (-1)^k \binom{y}{k} \frac{(2a)^k \sigma}{(\sigma+a)^{k+1}} =$$

$$= (-1)^y \sum_{k=0}^{y} (-1)^k (2a)^k \binom{y}{k} (1-a)^{x-k} \frac{x^{(k)}}{k!} =$$

$$= (-1)^y \sum_{k=0}^{y} (-1)^k \left(\frac{2a}{1-a}\right)^k \binom{y}{k} \binom{x}{k} (1-a)^x. \quad \blacksquare$$

4. Montrons que

$$\int_0^\infty L_n(a\xi) L_m\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi} d\xi = 2^{-m} \sum_{k=0}^{\min(n,\,m)} \binom{m}{k} \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} \tag{16.57}$$

pour $a \neq 1$, $a > 0$.

En effet,

$$\int_0^\infty L_x(a\xi)\, L_y\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{-\xi}\, d\xi = \frac{\sigma}{\sigma+a}\,\frac{\tau}{\tau+\frac{\sigma}{2(\sigma+a)}} = \frac{\sigma}{\sigma+a}\left(1-\frac{\sigma}{2(\sigma+a)}\right)^y =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma+a}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma+a}\right)\right]^y = 2^{-y}\sum_{k=0}^{y}\binom{y}{k}\binom{x}{k} a^k (1-a)^{x-k}. \quad \blacksquare$$

5. Montrons que

$$\int_0^\infty L_n(a\xi)\, L_m(\xi)\, e^{-\xi}\, d\xi = a^m \binom{n}{m} (1-a)^{n-m}$$

pour $n \geqslant m$.

En effet,

$$\int_0^\infty L_x(a\xi)\, L_y(\xi)\, e^{-\xi}\, d\xi = \frac{\sigma}{\sigma+a}\cdot\frac{\tau}{\tau+\frac{\sigma}{\sigma+a}} = \frac{\sigma}{\sigma+a}\left(1-\frac{\sigma}{\sigma+a}\right)^y =$$

$$= \frac{\sigma a^y}{(\sigma+a)^{y+1}} = a^y\,\frac{x(x-1)\ldots(x-y+1)}{y\,!}(1-a)^{x-y}. \quad \blacksquare$$

6. Montrons que

$$\int_0^\infty L_n(\xi)\, L_m(\xi)\, e^{-\alpha\xi}\, d\xi = \sum_{k=0}^{\min(m,\, n)}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{(\alpha-1)^{m+n-2k}}{\alpha^{m+n+1}}.$$

En effet,

$$\int_0^\infty L_x(\xi)\, L_y(\xi)\, e^{-\alpha\xi}\, d\xi = \frac{\sigma\tau}{\sigma+\tau+\alpha\sigma\tau} = \frac{\sigma\tau}{(1+\alpha\sigma)\left(\tau+\frac{\sigma}{1+\alpha\sigma}\right)} =$$

$$= \frac{\sigma}{1+\alpha\sigma}\left(1-\frac{\sigma}{1+\alpha\sigma}\right)^y = \frac{\sigma}{1+\alpha\sigma}\left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{(\alpha-1)(1+\alpha\sigma)}\right)\right]^y.$$

Donc,

$$\int_0^\infty L_x(\xi)\, L_y(\xi)\, e^{-\alpha\xi}\, d\xi = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^y \sum_{k=0}^{y}\binom{y}{k}\frac{1}{(\alpha-1)^k}\,\frac{\sigma}{(1+\alpha\sigma)^{k+1}}.$$

Comme

$$\frac{\sigma}{(1+\alpha\sigma)^{k+1}} = \frac{1}{\alpha^{k+1}}\binom{x}{k}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{x-k},$$

il vient

$$\int_0^\infty L_x(\xi)\, L_y(\xi)\, e^{-\alpha\xi}\, d\xi = \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{x+y}\sum_{k=0}^{y}\binom{y}{k}\binom{x}{k}\frac{1}{(\alpha-1)^{2k}}. \quad \blacksquare$$

CHAPITRE V

QUELQUES PROBLÈMES D'INVERSION NUMÉRIQUE DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

§ 17. Inversion de la transformée de Laplace à l'aide de polynômes orthogonaux sur un intervalle fini

P o s i t i o n d u p r o b l è m e. Dans les cas où pour une raison quelconque il est impossible de restituer analytiquement la fonction $f(t)$ si l'on en connaît l'image opérationnelle $\overline{f}(p)$, il semble naturel de poser le problème de l'inversion approchée de la transformée de Laplace. Supposons que la fonction inconnue $f(t)$ est intégrable sur tout intervalle fini $[0, T]$ et $f(t) \in L_2(\beta(t); 0, \infty)$, i.e.

$$\int_0^\infty \beta(t)|f(t)|^2 dt < \infty, \tag{17.1}$$

où $\beta(t)$, est une fonction non négative sur $[0, \infty]$ et, de plus,

$$\int_0^\infty \beta(t)\, dt < \infty. \tag{17.2}$$

La transformée de Laplace $\Phi(p)$ de la fonction $\beta(t) f(t)$ est

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\beta(t) f(t)\, dt. \tag{17.3}$$

On demande la fonction $f(t)$. En faisant le changement $x = e^{-t}$ dans l'intégrale (17.3), on obtient

$$\Phi(p) = \int_0^1 x^p \omega(x) \varphi(x)\, dx, \tag{17.4}$$

où

$$\varphi(x) = f(-\ln x), \quad \omega(x) = \frac{\beta(-\ln x)}{x}.$$

En vertu de (17.1) et (17.2), l'égalité intégrale (17.4) est vérifiée dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, donc, en donnant à la variable p successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, . . ., on obtient les « moments de

base »

$$\mu_k = \Phi(k) = \int_0^1 \omega(x)\, x^k \varphi(x)\, dx: \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{17.5}$$

de la fonction $\varphi(x)$.

Le problème initial peut désormais être formulé ainsi: restituer la fonction $\varphi(x)$ d'après ses moments de base (17.5). C'est le problème classique des moments de Hausdorff. Un cas particulier est le suivant: étant donnés les $(n+1)$ premiers moments de base $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ de la fonction $\varphi(x)$ construire un polynôme $q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ de degré n, tel que ses $(n+1)$ premiers moments de base coïncident avec ceux de la fonction $\varphi(x)$, i.e. tel que l'on ait

$$\Phi(k) = \int_0^1 \omega(x)\, x^k q_n(x)\, dx = \mu_k, \quad k \in [0,\ n] \tag{17.6}$$

Nous allons étudier le problème initial sous cette formulation.

En termes de calcul opérationnel, la fonction $q_n(e^{-t})$ possède la propriété suivante: la transformée de Laplace de la fonction $\beta(t)\, q_n(e^{-t})$ prend aux points $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ les mêmes valeurs que la fonction $\Phi(p)$, transformée de Laplace de la fonction cherchée $\beta(t) f(t)$. Dans ce sens, la fonction $q_n(e^{-t})$ est considérée comme la solution approchée de l'équation (17.3).

Plus bas on étudiera les méthodes de construction du polynôme $q_n(x)$ pour les fonctions $\omega(x)$ les plus importantes.

Signalons deux propriétés du polynôme $q_n(x)$:

1. *Le polynôme $q_n(x)$ est univoquement défini par les conditions* (17.6). Les égalités (17.6) représentent un système de $(n+1)$ équations algébriques linéaires en les $(n+1)$ coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n$ du polynôme $q_n(x)$. Le déterminant de ce système est un déterminant de Gram, non nul en raison de l'indépendance linéaire des fonctions $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Donc, le système (17.6) admet une solution $c_0, c_1, \ldots, c_n$ unique, i.e. le polynôme $q_n(x)$ existe et est défini de façon unique par les conditions (17.6).

2. *Dans la classe des polynômes de degré non supérieur à n, le polynôme $q_n(x)$ réalise le minimum de la fonctionnelle*

$$J(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \int_0^1 \omega(x) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right]^2 dx \tag{17.7}$$

En effet, le système normal déduit des conditions de minimum de la fonctionnelle (17.7) s'écrit

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = -2 \int_0^1 \omega(x) \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \right] x^k\, dx = 0,$$

où

$$\int_0^1 \omega(x)\, x^k q_n(x)\, dx = \int_0^1 \omega(x)\, x^k \varphi(x)\, dx, \quad k \in [0, n]$$

i.e. ce système coïncide avec (17.6). Cela veut dire que le polynôme $q_n(x)$ qui remplit les conditions (17.6) réalise l'extrémum lié de la fonctionnelle (17.7). Montrons que $q_n(x)$ réalise le minimum absolu de la fonctionnelle (17.7) dans la classe des polynômes de degré non supérieur à n.

Soit $P_n(x)$ un polynôme arbitraire de degré non supérieur à à n ($P_n(x) \not\equiv q_n(x)$). Mettons-le sous la forme $P_n(x) = q_n(x) + \varepsilon_n(x)$. On a

$$\int_0^1 \omega(x)[\varphi(x) - P_n(x)]^2\, dx = \int_0^1 \omega(x)[\varphi(x) - q_n(x)]^2\, dx - \\ -2\int_0^1 \omega(x)[\varphi(x) - q_n(x)]\, \varepsilon_n(x)\, dx + \int_0^1 \omega(x)\, \varepsilon_n^2(x)\, dx.$$

En vertu de (17.6), le second terme est nul, donc,

$$\int_0^1 \omega(x)[\varphi(x) - P_n(x)]^2\, dx > \int_0^1 \omega(x)[\varphi(x) - q_n(x)]^2\, dx.$$

Penchons-nous sur quelques cas particuliers de la fonction de base $\omega(x)$.

P o l y n ô m e s d e J a c o b i. La fonction de base $\omega(x)$ est

$$\omega(x) = x^\alpha (1 - x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta = -1.$$

Considérons les *polynômes de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^{-\alpha}(1-x)^\beta \frac{d^n}{dx^n}\{x^{\alpha+n}(1-x)^{\beta+n}\}; \tag{17.8}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times \\ \times \frac{(n+\alpha+\beta+1)\dots(n+\alpha+\beta+k)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)} x^k, \tag{17.9}$$

où

$$\binom{n+\alpha}{n} = \frac{(n+\alpha)\dots(1+\alpha)}{n!},$$

le terme de la somme correspondant à $k = 0$, est supposée égal à 1.

Ces polynômes sont orthogonaux

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = 0, \quad n \neq m; \qquad (17.10)$$

$$r_n = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,dx = + \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \qquad (17.11)$$

La dernière intégrale s'appelle *carré de la norme de base du polynôme* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. On cherchera le polynôme $q_n(x)$ sous la forme d'un développement sur les polynômes de Jacobi:

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{r_k} P_k^{(\alpha,\beta)}(x). \qquad (17.12)$$

Les polynômes de Jacobi étant orthogonaux, on calculera les coefficients a_k à l'aide de la formule

$$a_k = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta q_n(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx. \qquad (17.13)$$

En désignant par $\alpha_i^{(k)}$ le coefficient en x^i du polynôme $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ et tenant compte de la condition (17.6), on peut mettre (17.13) sous la forme

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} \Phi(i). \qquad (17.14)$$

Cette formule peut servir au calcul des coefficients a_k du polynôme $q_n(x)$, puisque les nombres $\alpha_i^{(k)}$ sont connus et les quantités $\Phi(i)$ données.

Intérprétons l'approximation de la fonction $\varphi(x)$ par le polynôme $q_n(x)$. En vertu de (17.6), la formule (17.14) peut encore s'écrire

$$a_k = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Cela signifie que le polynôme $q_n(x)$ n'est autre que la somme n-ième tronquée du développement de $\varphi(x)$ en série généralisée de Fourier sur les polynômes de Jacobi. En faisant tendre $n \to \infty$, on obtient le développement de la fonction cherchée $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} P_k^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad (17.15)$$

ou, en t

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r_k} P_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-t}). \tag{17.16}$$

Le dernier développement est la fonction cherchée. Les coefficients a_k se calculent avec les formules (17.14).

Voyons maintenant quel est le développement de la transformée de Laplace $\Phi(p)$ qui correspond à celui de la fonction $f(t)$ en série (17.16). A cet effet, développons la fonction x^p, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ sur les polynômes de Jacobi. Utilisons la formule (17.8) pour calculer les coefficients de Fourier de la fonction x^p

$$F_k(p)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} x^p P_k^{(\alpha, \beta)}(x)\, dx.$$

Une k-uple dérivation par parties donne

$$F_k(p)=\frac{\Gamma(p+\alpha+1)\,\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+p+\alpha+\beta+2)}\binom{p}{k}. \tag{17.17}$$

A remarquer que la fonction $F_k(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction

$$e^{-(\alpha+1)t}(1-e^{-t})^{\beta} P_k^{(\alpha, \beta)}(e^{-t}).$$

La fonction x^p se détaille donc comme suit

$$x^p=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha+1)\,\Gamma(k+\beta+1)}{r_k\Gamma(k+p+\alpha+\beta+2)}\binom{p}{k} P_k^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{17.18}$$

Compte tenu des développements (17.15) et (17.18) et de l'égalité généralisée de Parseval, il vient

$$\Phi(p)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} x^p \varphi(x)\, dx=$$

$$=\frac{\Gamma(p+\alpha+1)}{\Gamma(p+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^{\infty}(2k+\alpha+\beta+1)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\, \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(p+\alpha+\beta+1)\ldots(p+\alpha+\beta+k+1)}\, a_k. \tag{17.19}$$

La série (17.19) est absolument et uniformément convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re} p \geqslant 0$; il est aisé de s'en assurer à l'aide de l'inégalité de Schwarz-Bouniakovski. Cette série est une série d'interpolation sur des fonctions homographiques spéciales, donc, on peut l'utiliser à l'approximation de la transformée de Laplace $\Phi(p)$.

En particulier, le développement (17.19) suggère une autre méthode de calcul des coefficients a_k du développement (17.15), (17.16):

en supposant $p = 0, 1, 2, \ldots$, dans (17.19), on obtient un système triangulaire infini en les coefficients cherchées a_k, soit

$$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\Phi(n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)}{(n-k)!} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(k+\alpha+1)} a_k.$$

Le calcul sur machine des coefficients a_k à l'aide de ce système est parfois plus avantageux qu'avec la formule (17.14).

Il existe une autre méthode de construction du polynôme $q_n(x)$. Elle consiste à chercher $q_n(x)$ sous la forme

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(k)\,\Psi_{k,n}(k) \tag{17.20}$$

où $\Psi_{k,n}(x)$ sont des polynômes de degré n tels que

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta x^s \Psi_{k,n}(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pour } s \neq k \\ 1 \text{ pour } s = k, \end{cases} \quad 0 \leqslant s, \quad k \leqslant n.$$

Tout polynôme $\Psi_{k,n}(x)$, $k \in [0, n]$ donné par ses $(n+1)$ premiers moments

$$\mu_i = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq k, \\ 1 \text{ pour } i = k, \end{cases} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

est défini de façon univoque, donc, le développement (17.20) est unique. Si l'on dispose des tables des polynômes $\Psi_{k,n}(x)$, le calcul des valeurs du polynôme $q_n(x)$ à l'aide de la formule (17.20) est le plus commode.

Quelques propriétés constructives des polynômes $\Psi_{k,n}(x)$

1. *Supposons que le polynôme* $\Psi_{k,n}(x)$ est de la forme

$$\Psi_{k,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} a_{k,n}^{(n)} x^m, \quad k \in [0, n].$$

Les coefficients du polynôme sont symétriques, i.e.

$$a_{k,m}^{(n)} = a_{m,k}^{(n)}.$$

Ceci découle du fait que

$$a_{k,m}^{(n)} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \Psi_{k,n}(x)\,\Psi_{m,n}(x)\,dx = a_{m,k}^{(n)}.$$

2. *Le développement des polynômes* $\Psi_{k,n}(x)$ *sur les polynômes de Jacobi est de la forme*:

$$\Psi_{k,n}(x) = \sum_{m=k}^{n} \frac{\alpha_k^{(m)}}{r_m} P_m^{(\alpha,\beta)}(x), \quad k \in [0, n], \tag{17.21}$$

puisque

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \Psi_{k,n}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = \begin{cases} \alpha_k^{(m)} & \text{pour } k \leqslant m, \\ 0 & \text{pour } k > m, \end{cases}$$

où $\alpha_k^{(m)}$ *est le coefficient en* x^k *du polynôme* $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$. De (17.21) il suit que les polynômes $\Psi_{k,n}(x)$ sont reliés par les relations de récurrence

$$\Psi_{k,n}(x) = \Psi_{k,n-1}(x) + \frac{\alpha_k^{(n)}}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad k \in [0, n-1),$$

$$\Psi_{n,n}(x) = \frac{\alpha_n^{(n)}}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donc, les coefficients des polynômes $\Psi_{k,n}(x)$ se calculent à l'aide des formules de récurrence

$$a_{k,m}^{(n)} = a_{k,m}^{(n-1)} + \frac{\alpha_k^{(n)}\alpha_m^{(n)}}{r_n}, \quad k \in [0, n-1];$$

$$a_{n,m}^{(n)} = \frac{a_n^{(n)}\alpha_m^{(n)}}{r_n}.$$

Les cas particuliers des polynômes de Jacobi jouent un rôle important dans les applications. Il s'agit des polynômes de Legendre et des polynômes de Tchebychev du premier et du second genre. Voici la liste des principales formules correspondant à ces cas.

A. $\beta = 0$. Le facteur $\beta(t)$ de la relation intégrale (17.3) s'écrit $\beta(t) = e^{-(\alpha+1)t}$.

Au développement cherché de la fonction

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+\alpha+1)\, a_k P_k^{(\alpha,0)}(e^{-t})$$

correspond le développement de la transformée de Laplace $\Phi(p)$ en la série d'interpolation

$$\Phi(p) = \sum_{k=0}^{n} (2k+\alpha+1) \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(p+\alpha+1)\ldots(p+\alpha+k+1)} a_k.$$

Les coefficients a_k de ces développements se calculent à l'aide du système triangulaire

$$\frac{\Gamma(2n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \Phi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+\alpha+1}{2n+\alpha+1} \binom{2n+\alpha+1}{n-k} a_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Les polynômes $\Psi_{k,n}(x)$ sont de la forme

$$\Psi_{k,n}(x) = d_{k,n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \frac{m+n+\alpha+1}{m+k+\alpha+1} \left(\frac{n}{m}\right) \binom{n+m+\alpha}{n} x^m,$$

où

$$d_{n,k}=(-1)^{n-k}(n+k+\alpha+1)\binom{n}{k}\binom{n+k+\alpha}{n}.$$

B. $\alpha=\beta=0$ (*polynômes de Legendre*). On a $\beta(t)=e^{-t}$.
Au développement cherché de la fonction

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,a_k P_k(e^{-t}),$$

où $P_k(t)$ sont les polynômes de Legendre, correspond le développement de la transformée de Laplace $\Phi(p)$ en la série de la forme

$$\Phi(p)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\frac{p(p-1)\,\ldots\,(p-k+1)}{(p+1)(p+2)\,\ldots\,(p+k+1)}\,a_k.$$

Les coefficients a_k se calculent à l'aide du système triangulaire

$$\binom{2n}{n}\Phi(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n-k}a_k,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Les polynômes $\Psi_{k,n}(x)$ s'écrivent

$$\Psi_{k,n}(x)=(-1)^{n-k}(n+k+1)\binom{n}{k}\times$$

$$\times\binom{n+k}{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\frac{m+n+1}{m+k+1}\binom{n}{m}\binom{n+m}{n}x^m.$$

C. $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ (*polynômes de Tchebychev du premier genre*).
On a $\beta(t)=e^{-1/2\cdot t}(1-e^{-t})^{-1/2}$.
Les polynômes de Tchebychev du premier genre $T_n(x)$ s'écrivent:

$$T_n(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2k\frac{n(n+1)\,\ldots\,(n-k-1)}{(2k-1)\,!!}x^k.$$

Au développement de la fonction

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left[a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}a_k T_k(e^{-t})\right]\tag{17.22}$$

correspond le développement de la transformée de Laplace $\Phi(p)$ en la série

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\left\{a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p(p-1)\,\ldots\,(p-k+1)}{(p+1)(p+2)\,\ldots\,(p+k)}a_k\right\}.\tag{17.23}$$

Les coefficients a_k se calculent à l'aide du système triangulaire:

$$2^{2n-1}\Phi(n)=\frac{1}{2}\binom{2n}{n}a_0+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}a_k,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

D. $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ (*polynômes de Tchebychev du second genre*). On a $\beta(t)=e^{-3/2\cdot t}(1-e^{-t})^{1/2}$. Les polynômes de Tchebychev du second genre $U_n(x)$ sont de la forme

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n 2^n (2n+1)!!}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{n}{k}\right)^{2k}\times$$
$$\times\frac{2^k(n+2)\ldots(n+k+1)}{(2k+1)!!}x^k.$$

Au développement de la fonction

$$f(t)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}a_kU_k(e^{-t})\tag{17.24}$$

correspond le développement de la transformée de Laplace $\Phi(p)$ en la série

$$\Phi(p)=\frac{4}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(p+1)\ldots(p+k+2)}a_k.\tag{17.25}$$

Les coefficients a_k s'obtiennent à partir du système triangulaire:

$$2^{2n}\Phi(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{n+1}\binom{2n+2}{n-k}a_k,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

On remarquera que dans les calculs il est plus commode de se servir de la forme trigonométrique:

$$T_n(x)=\cos n\,[\arccos(2x-1)];$$
$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos(2x-1)]}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

En posant $2x-1=\cos\Theta$ ($\Theta\in[0,\ \pi]$) et compte tenu du fait que $x=e^{-t}$, i. e. $t=-2\ln\cos\frac{\Theta}{2}$, on peut mettre les développements (17.22) et (17.24) respectivement sous la forme

$$f\left(-2\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left[a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\Theta\right];$$

$$f\left(-2\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right)=\frac{8}{\sin\Theta}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin(k+1)\Theta.$$

Exemples

Remarque 1. Dans ce qui précède il était question de restituer une fonction $f(t)$ sachant la transformée de Laplace $\Phi(p)$ de $\beta(t) f(t)$. En réalité on connaît le plus souvent la transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(t)$ elle-même avec une certaine abscisse de convergence absolue γ_a non forcément nulle

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad \gamma_0 \in [\operatorname{Re} p, \gamma_a]. \tag{17.26}$$

Les méthodes précédentes de restitution de la fonction $f(t)$ peuvent être alors utilisées de la façon suivante:

1. Se servir de (2.14) pour mettre (17.26) sous la forme

$$hF(\gamma_0+ph)=\int_0^\infty e^{-\frac{\gamma_0 t}{h}} f\left(\frac{t}{h}\right) e^{-pt}\,dt \tag{17.27}$$

quel que soit $h > 0$. Le paramètre h peut être pris égal à l'unité de mesure de la variable t. Pour restituer la fonction $f\left(\frac{t}{h}\right)$ d'après sa transformée de Laplace (17.27) il est naturel de se servir des formules de calcul relatives à la fonction pondérée $\beta(t) = e^{-\frac{\gamma_0 t}{h}}$ $\left(\text{cas: } \beta=0\right.$ et $\left.\alpha = \frac{\gamma_0}{h} = -1\right)$. Pour moments $\mu_k = \Phi(k)$ il importe de prendre

$$\mu_k = hF(\gamma_0 + hk), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. On peut restituer cette fonction avec les polynômes de Legendre. Pour cela il suffit d'utiliser le fait que les paramètres $\gamma_0 > \gamma_a$ et $h > 0$ sont arbitraires. Posons $\gamma_0 = h$. Pour fonction de base on aura alors $\beta(t) = e^{-t}$ (cas $\alpha = \beta = 0$). Les coefficients de Fourier a_k du développement de $f(t)$ sur les polynômes de Legendre $P_n(e^{-t})$ se définissent à partir du système triangulaire (cas $\alpha = \beta = 0$), où les moments de $\Phi(k)$ sont les nombres $\mu_k = hF[h(k+1)]$. A signaler que cette approximation ne dépend pas de l'ordre de croissance exponentielle de la fonction $f(t)$ et que le paramètre h est toujours arbitraire, mais borné inférieurement par γ_a. Quel doit être le paramètre h? Supposons qu'il faille approcher la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. Comme $x = e^{-ht}$ applique l'intervalle $[0, T]$ sur l'intervalle $\varepsilon = e^{-hT} \leqslant x < 1$, il est naturel de prendre h tel que l'intervalle $[\varepsilon, 1]$ représente la plus grande partie de l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, en posant $h = \frac{h}{T} > \gamma_a$, on aura $\varepsilon = e^{-n}$.

3. La relation opérationnelle (17.26) étant donnée, pour obtenir le développement de la fonction $f(t)$ dans la classe des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de base $\beta(t)$, il faut mettre (17.27) sous la forme

$$hF(\gamma_0 + ph) = \beta(t)\,\varphi(t),$$

ou

$$\varphi(t) = [\beta(t)^{-1}] f\left(\frac{t}{h}\right) e^{-\frac{\gamma_0 t}{h}}.$$

On approchera la fonction $\varphi(t)$ par la fonction $q_n(e^{-t})$ d'après le schéma qui correspond à la fonction de base $\beta(t)$. On obtient alors l'approximation suivante

$$f\left(\frac{t}{h}\right) \approx \beta(t) e^{\frac{\gamma_0 t}{h}} q_n(e^{-t}).$$

Ainsi, pour les fonctions de base correspondant aux polynômes de Tchebychev du premier et du second genre on aura respectivement pour $h = \gamma_0 > \gamma_a$

$$f\left(-\frac{2}{h}\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{2}{\pi\sin\Theta}\left[a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\Theta\right]; \quad (17.28)$$

$$f\left(-\frac{2}{h}\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k+1)\Theta. \quad (17.29)$$

Les coefficients a_k de ces développements s'obtiennent à partir des systèmes triangulaires correspondants; pour moments de $\Phi(k)$ on prendra

$$\mu_k = hF(h(k+1)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Le développement (17.29) n'est autre que le développement de Fourier en série de sinus de la fonction

$$f\left(-\frac{1}{h}\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right).$$

Dans le développement (17.28), le facteur $\frac{1}{\sin\Theta}$ est susceptible d'influer sur l'erreur de calcul pour les valeurs de Θ proches de zéro. Donc, le développement (17.28) peut être utilisé pour les approximations « locales » i.e. pour des approximations impliquant le calcul de la fonction $f(t)$ en un point $t = t_0$ et en son voisinage. Dans ce cas le paramètre h peut être choisi tel que $x = e^{-ht}$ envoie le point t_0 en $x = \frac{1}{2}$ minimisant ainsi l'action du facteur $\frac{1}{\sin\Theta}$, i.e. $h = \ln\frac{2}{t_0}$. A signaler que lorsque $h = \ln\frac{2}{t_0}$ la quantité t_0 n'est assujettie à aucune restriction et que lorsque $\gamma_a > 0$ la méthode décrite ne réussit qu'à la condition que $t_0 \in \left]0, \frac{\ln 2}{\gamma_a}\right[$.

R e m a r q u e 2. Dans tous les cas considérés, les coefficients des systèmes triangulaires d'équations algébriques linéaires en a_k croissent très vite avec k. Pour atténuer leur influence sur l'erreur de calcul il faut, soit prendre (dans la mesure du possible) des données initiales μ_k exactes, soit avec un grand nombre de décimales vraies.

A titre d'illustration voyons deux exemples.

1. Restituer à l'aide des polynômes de Legendre la fonction définie par la transformée de Laplace

$$F(p)=\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{p}{2}\right)-\Psi\left(\frac{p-1}{2}\right)\right\}, \quad \operatorname{Re} P>-1.$$

En posant $h = 1$ on aura pour moments μ_k de la fonction cherchée

$$\mu_k = F(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculons $\mu_k = F(k)$. On a

$$\mu_0=F(0)=\frac{1}{2}\left\{\Psi(0)-\Psi\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\ln 2;$$

$$\mu_1=F(1)=\frac{1}{2}\{\Psi(1)-\Psi(0)\}=1-\ln 2.$$

Pour $p = 2k$ il vient

$$\Psi\left(\frac{p}{2}\right)=\Psi(k)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{k}+\Psi(0)$$

et

$$\Psi\left(\frac{p-1}{2}\right)=\Psi\left(k-\frac{1}{2}\right)=2\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m-1}+\Psi(0)-\ln 2,$$

donc,

$$\mu_{2k}=F(2k)=\ln 2-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m(2m-1)}.$$

De façon analogue, lorsque $p = 2k + 1$, on obtient

$$\mu_{2k+1}=F(2k+1)=\frac{1}{2k+1}-F(2k)$$

Les valeurs de la transformée de Laplace $F(p)$ sont consignées dans le tableau 1.

Tableau 1

μ_k \ k	0	1	2
Exactes	$\ln 2$	$1-\ln 2$	$\ln 2-\frac{1}{2}$
Approchées	0,69314718	0,30685282	0,19314718

Suite

	3	4	5	6
Exactes	$\frac{5}{6}-\ln 2$	$\ln 2-\frac{7}{12}$	$\frac{47}{60}-\ln 2$	$\ln-\frac{37}{60}$
Approchées	0,14018615	0,10981385	0,0901186153	0,076480514

Résolvons le système triangulaire en a_k (cas des polynômes de Legendre) respectivement pour les valeurs exactes et approchées

de $\mu_k = F(k)$. Ceci nous permettra d'illustrer le caractère de l'accumulation des erreurs d'arrondi affectant le calcul des valeurs de $F(k)$.

Les résultats des calculs sont consignés dans le tableau 2.

Tableau 2

a_k \ k	0	1	2
Exactes	ln 2	2 — 3 ln 2	13 ln 2 — 9
Approchées	0,69314718	—0,07944154	0,01091334
	0,69314718	—0,07944154	0,01091334

Suite

	3	4	5	6
Exactes	$\frac{131}{3} - 63 \ln 2$	$321 \ln 2 - \frac{445}{2}$	$\frac{34997}{30} - 1683 \ln 2$	$8989 \ln 2 - \frac{18621}{30}$
Approchées	—0,00160568	0,00024478	—0,00003728	0,00000102
	—0,00160564	0,00024478	—0,00003852	0,00001022

A l'examen de ce tableau on constate que les erreurs d'arrondi affectant le calcul des quantités μ_k commencent à influer sérieusement sur a_5 et a_6. Ces erreurs seront encore plus importantes pour les a_k suivants.

La fonction cherchée est définie par la série

$$f(t) \approx 0{,}69315\, P_0(e^{-t}) - 0{,}07944\, P_1(e^{-t}) + 0{,}01091\, P_2(e^{-t}) - 0{,}00161\, P_3(e^{-t}) + 0{,}00024\, P_4(e^{-t}) - 0{,}00004\, P_5(e^{-t}).$$

2. Restituer à l'aide de la série trigonométrique (17.29) (cas des polynômes de Tchebychev du second genre) la fonction de transformée de Laplace $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Posons $\gamma_0 = h = 1$. Les résultats des calculs sont consignés dans le tableau 3.

A l'examen du tableau on remarque que les coefficients a_g décroissent pas assez vite.

La série (17.29) étant une série de sinus de la fonction $f\left(-2 \ln \cos \frac{\Theta}{2}\right)$, on peut se servir des méthodes générales d'amélioration de la convergence. Ainsi, on sait que si la fonction $f\left(-2 \ln \cos \frac{\Theta}{2}\right)$ est suffisamment de fois dérivable et s'annule aux extrémités de l'intervalle $[0, \pi]$ les coefficients a_k de son développement en série de sinus sont de l'ordre de $o\left(\frac{1}{k^3}\right)$. Si donc

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t) = f_0; \quad \lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = f_\infty$$

Tableau 3

k	$\mu_k = F(k+1)$	a_k
0	0,70710678	0,70710678
1	0,44721360	0,37464084
2	0,31622777	0,02554706
3	0,24253562	0,22453064
4	0,19611614	0,03847102
5	0,16439899	0,11649724
6	0,14142136	0,05787642
7	0,12403473	0,06251408

et que les limites soient finies, on peut améliorer la convergence de la série de sinus. A cet effet, il suffit de considérer la transformée de Laplace

$$F_1(p) = F(p) - \left[\frac{f_\infty}{p} \quad \frac{f_0 - f_\infty}{p+1}\right] = f_1(t) = f(t) - f_\infty t + (f_0 - f_\infty)\, e^{-t},$$

puisque la fonction $f_1\left(\frac{2}{h}\ln\cos\frac{\Theta}{2}\right)$ est nulle aux extrémités de l'intervalle $[0, \pi]$. Pour l'exemple considéré on a

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = 1, \quad \lim_{p\to 0}\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = 0,$$

donc, on peut s'attendre à une amélioration de la convergence du développement de l'original de la transformée de Laplace

$$F_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \quad \frac{1}{p+1}$$

Les résultats des calculs sont consignés dans le tableau 4.

Tableau 4

	$\mu_k = F(k+1)$	a_k
0	0,20710678	0,20710678
1	0,11388027	0,04130752
2	0,06622777	—0,14111966
3	0,04253562	0,09119744
4	0,02944947	—0,06153000
5	0,02154185	0,03079388
6	0,01642136	—0,01362944
7	0,01292362	—0,00056472

Le développement cherché s'écrit

$$f\left(-2 \ln \cos \frac{\Theta}{2}\right) = \cos^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{4}{\pi} (0{,}2071 \sin \Theta +$$

$$+ 0{,}0413 \sin 2\Theta - 0{,}1411 \sin 3\Theta + 0{,}0912 \sin 4\Theta +$$

$$+ 0{,}0615 \sin 5\Theta + 0{,}0308 \sin 6\Theta - 0{,}0136 \sin 7\Theta -$$

$$- 0{,}0006 \sin 8\Theta + \ldots).$$

Les matrices du système triangulaire correspondant aux cas des polynômes de Legendre ($\alpha = \beta = 0$), des polynômes de Tchebychev du premier genre $\left(\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\right)$, des polynômes de Tchebychev du second genre $\left(\alpha = \beta = \frac{1}{2}\right)$ sont consignées respectivement dans les tableaux 5, 6 et 7.

Tableau 5

μ_k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1										
2	1	1									
6	2	3	1								
20	5	9	5	1							
70	14	28	20	7	1						
252	42	90	75	35	9	1					
924	132	297	275	154	54	11	1				
3 432	429	1 001	1 001	637	273	77	13	1			
12 870	1 430	3 432	3 640	2 548	1 260	440	104	15	1		
48 620	4 862	11 934	13 260	9 996	5 508	2 244	663	135	17	1	
184 756	16 796	41 990	48 450	38 760	23 256	10 659	3705	950	170	19	1

Tableau 6

μ_k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1/2	1										
2	1	1									
8	3	4	1								
32	10	15	6	1							
128	35	56	28	8	1						
512	126	210	120	45	10	1					
2 048	462	792	495	220	66	12	1				
8 192	1 716	3 003	2 002	1 001	364	91	14	1			
32 768	6 435	11 440	8 008	4 368	1 820	560	120	16	1		
131 072	24 310	43 758	31 824	18 564	8 568	3 060	816	153	18	1	
524 288	92 378	167 960	125 970	77 520	38 760	15 504	4845	1140	190	20	1

Tableau 7

μ_k	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1										
4	2	1									
16	5	4	1								
64	14	14	6	1							
256	42	48	27	8	1						
1 024	132	165	110	44	10	1					
4 096	429	572	429	208	65	12	1				
16 384	1 430	2 002	1 638	910	350	90	14	1			
65 536	4 862	7 072	6 188	3 808	1 700	544	119	16	1		
262 144	16 796	25 194	23 256	15 504	7 752	2 907	798	152	18	1	
1 048 576	58 786	90 440	87 210	62 016	33 915	4 364	4655	1120	189	20	1

§ 18. Inversion de la transformée de Laplace à l'aide de séries sur les polynômes généralisés de Laguerre

Soit donnée la transformée de Laplace

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{18.1}$$

Supposons que la fonction inconnue $f(t)$ réalise la condition

$$\int_0^\infty e^{-t}\,|f(t)|^2\,nt<\infty. \tag{18.2}$$

La fonction $g(t)=t^{-\lambda}f(t)$ est alors représentable par une série généralisée sur les polynômes de Laguerre (cf. 9)

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)}\,L_k^{(\lambda)}(t). \tag{18.3}$$

Les polynômes généralisés de Laguerre s'écrivent

$$L_k^{(\lambda)}(t)=\frac{1}{k!}\,t^{-\lambda}e^{t}\,\frac{d^k}{dt^k}\{e^{-t}t^{k+\lambda}\};$$

$$L_k^{(\lambda)}(t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)}\,\frac{(-t)^m}{m!\,(n-m)!},$$

$$(\lambda>-1).$$

Ces polynômes sont orthogonaux, i.e.

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\lambda L_k^{(\nu)}(t)\, L_m^{(\nu)}(t)\, dt = 0, \quad k \neq m,$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^\lambda [L_k^{(\lambda)}(t)]^2\, dt = \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{k\,!}.$$

La transformée de Laplace $F(p)$ est une fonction analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$. En effet, en vertu de l'inégalité de Schwarz-Bouniakovski on a

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\, dt\right| \leqslant \int_0^\infty t^\lambda e^{-t}e^{-(\operatorname{Re} p-1)t}\, |g(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}e^{-2(\operatorname{Re} p-1)t}\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\, |g(t)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

D'où l'on déduit que l'intégrale (18.1) est absolument et uniformément convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$ sous la condition (18.2); donc la fonction $F(p)$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$.

Déterminons les coefficients a_k de la manière suivante. Développons la fonction $e^{-(p-1)t}$ en série sur les polynômes de Laguerre. Puisque

$$\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}e^{-(p-1)t}L_k^{(\lambda)}(t)\, dt = \frac{1}{p^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{k\,!}, \tag{18.4}$$

il vient

$$e^{-(p-1)t} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{p^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k L_k^{(\lambda)}(t).$$

Mettons l'intégrale (17.1) sous la forme

$$F(p) = \int_0^\infty t^\lambda e^{-t}e^{-(p-1)t}g(t)\, dt.$$

D'où, compte tenu de (17.3), (17.4) et de l'égalité généralisée de Parseval,

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{1}{p^{\lambda+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^k.$$

Soit le changement $\frac{1}{p}=z$:

$$\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-z)^k. \tag{18.5}$$

A remarquer que la fonction $\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)$ est analytique dans le disque $|z-1|<1$, puisque la fonction $F(p)$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$, et l'application $p=\frac{1}{z}$ envoie le demi-plan $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$ dans le disque $|z-1|<1$. De (18.5) il suit que les coefficients a_k du développement (18.3) sont ceux du développement de la fonction $\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)$ en série de Taylor au voisinage du point $z=1$, i.e. dans le cas général les coefficients a_k peuvent être calculés avec la formule

$$a_k=\frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k}\left\{\frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right)\right\}_{z=1}. \tag{18.6}$$

Le plan des z étant l'image du plan des p par l'application $\frac{1}{p}=z$ les points singuliers de la transformée de Laplace $F(p)$ les plus éloignés de l'origine des coordonnées se transforment en le voisinage de l'origine des coordonnées $z=0$, ce qui réduit le rayon de convergence de la série (18.5) et d'une façon générale influe sur la vitesse de décroissance des coefficients a_k.

En résumé, si la transformée de Laplace $F(p)$ présente des singularités dont les parties réelle ou imaginaire sont élevées, le développement de la fonction inconnue $f(t)$ sur les polynômes de Laguerre sera peu efficace en raison de sa faible convergence, et inversement, si la transformée de Laplace $F(p)$ possède une seule singularité en l'origine des coordonnées $p=0$ ou si ses singularités sont proches de l'origine des coordonnées, il faut s'attendre à une assez rapide convergence du développement sur les polynômes de Laguerre.

Exemple: à l'aide des polynômes de Laguerre cherchons la fonction $f(t)$ d'image

$$F(p)=-\frac{C+\ln p}{p}$$

C est la constante d'Euler).

Suivant la méthode exposée il nous faut développer la fonction $\frac{1}{z} F\left(\frac{1}{z}\right)$ en série de Taylor au voisinage du point $z=1$. On a

$$\frac{1}{z} F\left(\frac{1}{z}\right)=\ln z-C=-C+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

Donc,

$$f(t) = -C - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k(t)}{k} = \ln t.$$

§ 19. Inversion de la transformée de Laplace à l'aide de séries de Neumann

1. La transformation de Laplace nous permet de nous assurer sans peine que

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu} \tau^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{\alpha\tau})\, d\tau =$$

$$= \alpha^{-\frac{\mu+1}{2}} t^{\frac{\nu+\mu}{2}} J_{\nu+\mu}(2\sqrt{\alpha t}), \quad \mathrm{Re}\,\nu > 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu > -1. \qquad (19.1)$$

Posons $\alpha = \frac{t}{4}$ et effectuons le changement $\tau = tx^2$ sous le signe d'intégration; puis mettons (19.1) sous la forme

$$\frac{t}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^1 \left[\frac{t}{2}(1-x^2)\right]^{\mu} x^{\nu} J_{\nu-1}(tx)\, dx = J_{\nu+\mu}(t). \qquad (19.2)$$

Cette intégrale équivaut à la première intégrale définie de Sonine (théorie des fonctions de Bessel).

Soit $f(z)$ une fonction analytique au voisinage de l'origine des coordonnées, i.e.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^k(0) \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \rho. \qquad (19.3)$$

Pour $|t| < 2\rho$, on a alors

$$t \int_0^1 x^{\nu} J_{\nu-1}(tx) f\left[\frac{t}{2}(1-x^2)\right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} f^k(0) J_{k+\nu}(t), \quad \nu > 0. \qquad (19.4)$$

Les séries

$$g_{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{k+\nu}(t), \quad \nu > 0 \qquad (19.5)$$

s'appellent *séries de Neumann* [2].

A l'aide de (19.4) on s'assure sans peine que toute série de Neumann (19.5) peut être associée à une série entière

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < \rho, \qquad (19.6)$$

et que

a) la somme $g_\nu(t)$ de la série de Neumann (19.5) est reliée à celle de la série (19.6) à l'intérieur de son disque de convergence par la relation intégrale

$$g_\nu(t) = t \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx) f\left[\frac{t}{2}(1-x^2)\right] dx; \tag{19.7}$$

b) la fonction $g_\nu(t)$ est régulière dans le domaine d'analyticité de la fonction $f\left(\frac{t}{2}\right)$, i.e. les singularités de la fonction $g_\nu(t)$ sont déterminées par celles de la fonction $f\left(\frac{t}{2}\right)$;

c) le domaine de convergence de la série (19.5) est identique à celui de la série de Maclaurin de la fonction $f\left(\frac{t}{2}\right)$.

Citons un exemple d'application de la formule (19.4). Supposons que $f(z) = \varphi(\Psi z)$ où Ψ est une fonction indépendante de z. Comme

$$f^{(k)}(z) = \Psi^k \varphi^{(k)}(\Psi z),$$

(19.4) peut s'écrire

$$t \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx)\, \varphi\left(\Psi \frac{t}{2}(1-x^2)\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)\, \Psi^k J_{(k+\nu)}(t).$$

En particulier, en posant $\Psi \equiv t$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)\, t^{k+\nu} J_{k+\nu}(t) = t^{\nu+1} \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx)\, \varphi\left[\frac{t^2}{2}(1-x^2)\right] dx$$

qui est l'analogue de la relation fonctionnelle (19.4) pour les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+\nu} J_{k+\nu}(t).$$

Posons par exemple $\Psi \equiv \frac{\omega}{t}$, $\Psi = \frac{t}{\omega}$; on aura respectivement

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) \left(\frac{\omega}{t}\right)^{k+\nu} J_{k+\nu}(t) = \frac{\omega^\nu}{t^{\nu-1}} \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx)\, \varphi\left[\frac{\omega}{2}(1-x^2)\right] dx, \tag{19.8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0) \left(\frac{t}{\omega}\right)^{k+\nu} J_{k+\nu}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{\omega} \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx)\, \varphi\left[\frac{t^2}{2\omega}(1-x^2)\right] dx. \tag{19.9}$$

Si $\varphi(y) = \cos y$ dans (19.8), il vient

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\omega}{t}\right)^{2k+\nu} J_{2k+\nu}(t) = \frac{\omega^\nu}{t^{\nu-1}} \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx) \times$$
$$\times \cos\left[\frac{\omega}{2}(1-x^2)\right] dx \qquad (19.10)$$

Cette série définit la *fonction de Lommel* $U_\nu(\omega, t)$. On a obtenu simultanément la représentation de cette fonction. Si $\varphi(y) = \sin y$

$$\frac{\omega^\nu}{t^{\nu-1}} \int_0^1 x^\nu J_{\nu-1}(tx) \sin\left[\frac{\omega}{2}(1-x^2)\right] dx = U_{\nu+1}(\omega, t).$$

Remarque 1. La formule (19.4) n'est valable que pour $\nu > 0$. Pour $\nu = 0$ on peut se servir de la variante suivante de cette formule

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_k(t) = a_0 J_0(t) + t \int_0^1 x J_0(tx) f\left[\frac{t}{2}(1-x^2)\right] dx,$$

où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} t^k.$$

Remarque 2. L'exposé précédent reste en vigueur pour les séries analogues dans lesquels les fonctions de Bessel J de la variable réelle sont remplacées par des fonctions de Bessel I de l'argument imaginaire. La formule (19.4) s'écrit alors

$$t \int_0^1 x^\nu I_{\nu-1}(tx) f\left[\frac{t}{2}(1-x^2) dx = \sum_{k=0} f^{(k)}(0) I_{k+\nu}(t).\right.$$

2. Développons la fonction $f(t)$ en série de Neumann. Supposons que $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = F(p)$ et que la fonction $F(p)$ est analytique au voisinage de l'infini. On cherchera le développement de la fonction $F(p)$ sous la forme

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\sqrt{p^2+\lambda^2}-p)^n}{\lambda^n \sqrt{p^2+\lambda^2}}. \qquad (19.11)$$

La substitution $\sqrt{p^2+\lambda^2} - p = u$ ramène l'expression (19.11) à

$$\frac{\lambda^2+u^2}{2u} F\left(\frac{\lambda^2-u^2}{2u}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda^n} u^n, \qquad (19.12)$$

et le problème consiste alors à développer la fonction (19.12) en une série entière au voisinage du point $u = 0$. Ce développement existe puisque par hypothèse la fonction $F(p)$ est régulière au voisinage du point à l'infini. Soit ρ le rayon de convergence de la série (19.12). La série (19.11) est absolument et uniformément convergente dans le domaine défini par

$$|p| > \max\left\{1, \frac{1}{\rho(1+\sqrt{2})}\right\}. \tag{19.13}$$

Comme

$$J_\nu(\lambda t) = \frac{p(\sqrt{p^2+\lambda^2}-p)^\nu}{\lambda^\nu \sqrt{p^2+\lambda^2}}, \quad \operatorname{Re} \nu > - \quad ,$$

et que les termes de la série (19.11) sont réguliers dans le domaine (19.13), le théorème de décomposition des opérateurs réguliers (cf. § 7) entraîne

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\lambda t), \tag{19.14}$$

et la série est uniformément convergente sur tout intervalle $[0, T]$. Les coefficients a_n du développement (19.14) peuvent être calculés en vertu de (19.12) avec la formule

$$a_n = \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^n}{du^n} \left\{\frac{\lambda^2+u^2}{2u} F\left(\frac{\lambda^2-u^2}{2u}\right)\right\}_{u=0}. \tag{19.15}$$

Si la fonction $f(t)$ possède un point de ramification en l'origine des coordonnées, il est plus commode de la chercher sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{n+\nu}(\lambda t).$$

Les coefficients a_n sont alors donnés par la formule

$$a_n = \frac{\lambda^{n+\nu}}{n!} \frac{d^n}{du^n} \left\{\frac{\lambda^2+u^2}{2u^{\nu+1}} F\left(\frac{\lambda^2-u^2}{2u}\right)\right\}_{u=0}.$$

Dans certains cas on peut chercher la fonction $f(t)$ sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\nu} J_{n+\nu}(t). \tag{19.16}$$

On sait (cf. [10]) formule (9.299) que

$$t^{\nu+n} J_{\nu+n}(t) = \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{2^{n+\nu}\Gamma(n+\nu+1)} \frac{p}{(p^2+1)^{n+\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Donc, l'image de $f(t)$ est

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{2^{n+\nu}\Gamma(n+\nu+1)} \frac{1}{(p^2+1)^n}.$$

Et les coefficients a_n se calculent à l'aide de la formule

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{2^{n+\nu}\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(2n+2\nu+1)} \frac{d^n}{du^n} \left\{ \frac{1}{u^{\nu+\frac{1}{2}}} F\left(\sqrt{\frac{1-u}{u}}\right) \right\}_{u=0}.$$

R e m a r q u e 1. Dans tous ces développements, le paramètre λ était arbitraire. Dans les calculs, on peut le faire varier à loisir.

R e m a r q u e 2. On pourrait obtenir des développements analogues sur les fonctions de Bessel de l'argument imaginaire.

Il est clair que ces formules d'inversion de la transformée de Laplace ne sont pas universelles et ne peuvent être utilisées le plus efficacement que dans la classe des fonctions $F(p)$ dont il est relativement aisé de déterminer les coefficients de la série de Maclaurin, moyennant un changement approprié de la variable p.

Cherchons la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est

$$F(p) = \Phi(p)\, e^{-\alpha(\sqrt{p^2+\lambda^2}\quad p)} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \qquad \alpha > 0.$$

où $\Phi(p)$ est une fonction arbitraire, analytique au voisinage du point à l'infini.

Dans ce cas il y a intérêt à procéder comme suit. En posant

$$\lambda^\nu \frac{\lambda^2+u^2}{2u^{\nu+1}} \Phi\left(\frac{\lambda^2-u^2}{2u}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\lambda^n} u^n, \tag{19.19}$$

on obtient

$$\lambda^\nu \frac{\lambda^2+u^2}{2u^{\nu+1}} F\left(\frac{\lambda^2-u^2}{2u}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\lambda^n} u^n e^{-\alpha u}.$$

Si l'on utilise la relation opérationnelle

$$t^{\frac{\nu}{2}} (t+2a_0)^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(\lambda\sqrt{t^2+2a_0 t}\right) = \frac{p\left(\sqrt{p^2+\lambda^2}-p\right)^\nu}{\lambda^\nu \sqrt{p^2+\lambda^2}} e^{-\alpha_0(\sqrt{p^2-\lambda^2}-p)},$$

on obtient le développement

$$f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \left(\frac{t}{t+2\alpha}\right)^{\frac{n+\nu}{2}} J_{n+\nu}\left(\lambda\sqrt{t^2+2\alpha t}\right).$$

Soit $\varphi(z)$ la fonction définie par la série entière

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

(les coefficients a_n sont déterminés par le développement (19.19)); en vertu de (19.8) la fonction cherchée $f(t)$ peut être représentée sous

la forme intégrale

$$f(t)=\frac{t}{\lambda^{\nu}}\left(\frac{t}{t+2a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\int_0^1 \tau^{\nu}J_{\nu-1}\left(\lambda\tau\sqrt{t^2+2\alpha t}\right)\varphi\left[\frac{t}{2}(1-\tau^2)\right]d\tau.$$

Si la transformée de Laplace est

$$F(p)=\Phi(p)\,e^{-\alpha(\sqrt{p^2+\lambda^2}-p)}=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

contrairement à ce qui précède il faut effectuer le changement $u = p-\sqrt{p^2-\lambda^2}$.

Si

$$\lambda^{\nu}\,\frac{\lambda^2-u^2}{2u^{\nu+1}}\,\Phi\left(\frac{\lambda^2+u^2}{2u}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda^n}u^n, \tag{19.20}$$

en appliquant la relation opérationnelle

$$t^{\frac{\nu}{2}}(t+2a_0)^{-\frac{\lambda}{2}}I_{\nu}\left(\lambda\sqrt{t^2+2a_0t}\right)=\frac{p\,(p-\sqrt{p^2-\lambda^2})^{\nu}}{\lambda^{\nu}\sqrt{p^2-\lambda^2}}\,e^{a_0(p-\sqrt{p^2-\lambda^2})},$$

on obtient

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{t}{t+2\alpha}\right)^{\frac{n+\nu}{2}} I_{n+\nu}\left(\lambda\sqrt{t^2+2\alpha t}\right)$$

et

$$f(t)=\frac{t}{\lambda^{\nu}}\left(\frac{t}{t+2\alpha}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}\int_0^1 \tau^{\nu}I_{\nu}\left(\lambda\tau\sqrt{t^2+2\alpha t}\right)\varphi\left[\frac{t}{2}(1-\tau^2)\right]d\tau,$$

où

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{z^n}{n!}$$

(les coefficients a_n sont donnés par (19.20)).

Signalons enfin que le calcul de la fonction $f(t)$ dans le cas général où

$$F(p)=\Phi(p)\,e^{-\sqrt{ap^2+bp+c}},\quad a>0,$$

peut être ramené à l'un des cas décrits selon le signe du discriminant du trinôme du second degré

$$ap^2+bp+c\equiv a\left[\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

§ 20. Formule du trapèze pour l'intégrale de Riemann-Mellin

Une autre méthode de calcul approché d'une fonction $f(t)$ dont on connaît la transformée de Laplace $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ consiste à établir les formules de quadrature de l'intégrale de Riemann-Mellin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad \gamma > \gamma_a. \tag{20.1}$$

Le plus élémentaire d'entre elles est la formule des trapèzes.

Divisons l'intervalle d'intégration en intervalles partiels de longueur h par les points

$$p_k = \gamma + ikh, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

et appliquons la formule des trapèzes. On obtient

$$e^{-\gamma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} F(\gamma + i\eta)\, d\eta \approx \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikht} F(\gamma + ikh). \tag{20.2}$$

Le second membre de la formule d'approximation (20.2) est une série trigonométrique de période $\frac{2\pi}{h}$ (on suppose que $F(\gamma + i\lambda)$ décroît et tend vers zéro lorsque $\lambda \to \pm\infty$ avec une vitesse suffisante pour que cette série converge). Au premier membre de (20.2) on reconnaît la fonction $e^{-\gamma t} f(t)$ qui en général n'est pas périodique. Donc, à h fixe, la formule des trapèzes ne présente de l'intérêt que pour $t \in \left]0, \frac{2\pi}{h}\right[$. Pour se faire une idée de sa précision, il faut établir quelle fonction de l'argument t a pour développement la série trigonométrique (20.2).

A cet effet procédons comme suit. Supposons que la fonction $\varphi(t)$ est absolument intégrable sur l'intervalle $[0, \infty]$ et telle que pour $t \in [0, l]$ la série fonctionnelle

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t + kl)\, \eta(t + kl) \tag{20.3}$$

est uniformément convergente ; $\eta(t)$ est la *fonction unité de Heaviside*.

La fonction $u(t)$ est visiblement périodique et de période l. Supposons par ailleurs que $\Phi(p)$ est la transformée de Laplace de $\varphi(t)\, \eta(t)$. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction $u(t)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^l e^{-\frac{2\pi}{l} int} u(t)\, dt = \frac{1}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l e^{-\frac{2\pi}{l} int} \varphi(t + nl)\, \eta(t + kl) \times$$

$$\times\, dt = \frac{1}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kl}^{(k+1)l} e^{-\frac{2\pi}{l} inx} \varphi(x)\, \eta(x)\, dx =$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{l}inx}\varphi(x)\,\eta(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{l}inx}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\Phi\left(i\frac{2\pi n}{l}\right),\quad n=0,\quad \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

Si donc la série (20.3) est uniformément convergente sur l'intervalle $\left[0,\ \frac{2\pi}{h}\right]$, $h=\frac{2\pi}{l}$, et que sa somme puisse être développée en série de Fourier, on aura pour $t\in\left]0,\ \frac{2\pi}{h}\right[$

$$\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(t+\frac{2\pi}{h}k\right)=\frac{h}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(inh)\,e^{inht}. \tag{20.4}$$

Lorsque $t=0$ cette égalité est l'analogue de la formule de sommation de Poisson relativement à la transformation unilatérale de Laplace, plus exactement

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi\left(\frac{2\pi}{h}k\right)=\frac{h}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(inh)$$

(sous réserve que la série du second membre soit convergente).

Posons $\varphi(t)=e^{-\nu t}f(t)$; il vient $\Phi(p)=F(\gamma+p)$. Comme dans le cas général

$$|f(t)|<Me^{\gamma_a t},$$

où γ_a est l'abscisse de convergence absolue de l'intégrale de Laplace, on a

$$|\varphi(t+kl)|=|e^{-\gamma(t+kl)}f(t+kl)|<Me^{-(\gamma-\gamma_0)kl},\quad \gamma>\gamma_a.$$

Donc, la série (20.3) est uniformément convergente sur tout intervalle $[0,\ T]$.

Si la somme de cette série remplit les conditions de développement en série de Fourier, l'égalité (20.4) peut s'écrire

$$v(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi}{h}\gamma k}f\left(t+\frac{2\pi}{h}k\right)=\frac{h}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{(\gamma+ikh)t}F(\gamma+ikh). \tag{20.5}$$

Le second membre coïncide avec celui de la formule (20.2). Donc l'erreur $\varepsilon(t)$ affectant la formule approchée

$$f(t)\approx\frac{h}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}e^{(\gamma+ikht)}F(\gamma+ikh)$$

est la somme de deux erreurs:

$\varepsilon_1=\varepsilon_1(t)$ due à l'élimination des termes de la série trigonométrique d'indice supérieur à N, et

$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$ due à la négligence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{h}\gamma k} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right).$$

La dernière erreur peut être majorée ainsi

$$|\varepsilon_2(t)| \leqslant M e^{\gamma_0 t} \frac{e^{-\frac{2\pi}{h}(\gamma - \gamma_a)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{h}(\gamma - \gamma_a)}}.$$

Dans les calculs, il est souvent préférable d'améliorer la convergence des séries trigonométriques (20.2) par une méthode analogue à celle de A. Krylov. Examinons un cas particulier de cette méthode.

Supposons que la fonction $f(t)$ est continue avec ses dérivées d'ordre 1 à n et que la n-ième dérivée est transformable-Laplace. Posons

$$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) = R_n(p). \quad (20.6)$$

De toute évidence $R_n(p)$ est la transformée de Laplace de $f^{(n)}(t)$. Supposons que $F(\gamma + i\eta)$ décroît lentement vers zéro lorsque $\eta \to \pm \infty$ et, partant, que la série trigonométrique converge lentement. En vertu des relations opérationnelles (20.6), la fonction $F(p)$ peut s'écrire:

$$F(p) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)}{p^{m+1}} + \frac{1}{p^n} R_n(p).$$

La formule (20.2) devient alors

$$f(t) \approx \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(\gamma + ikh)t} \frac{R_n(\gamma + ikh)}{(\gamma + ikh)^n}. \quad (20.7)$$

Dans ce cas la série trigonométrique converge plus rapidement, car $R_n(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f^{(n)}(t)$ et, par conséquent, en vertu d'un théorème connu (cf. 4, propriété 11) $R_n(\gamma + i\eta) \to 0$ lorsque $\eta \pm \infty$, i. e. les coefficients de la série trigonométrique (20.7) ont pour ordre

$$\left| \frac{R_n(\gamma + ikh)}{(\gamma + ikh)^n} \right| = o\left(\frac{1}{(\gamma + ikh)^n}\right), \quad k \to \pm \infty.$$

Dans les cas où le chemin d'intégration Re p est proche de l'axe imaginaire ou confondu avec lui, la méthode d'amélioration de la convergence doit être modifiée. Il vient

$$f(t) \approx e^{-t} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{t^m}{m!} + \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(\gamma + ikht)} F_n(\gamma = ikh),$$

où

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}(0^+), \quad F_n(p) = \frac{1}{(p+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R_{n-k}(p).$$

La proximité du paramètre γ de zéro n'entraîne aucune complication.

Les valeurs des fonctions $R_k(p)$ en les points complexes $p = \gamma + ikh$ se calculent le plus aisément avec la formule de récurrence

$$R_k(p) = pR_{k-1}(p) = f^{(n-1}(0), \quad R_0(p) = F(p).$$

Si les quantités $f(0)$, $f'(0)$, . . ., $f^{(n+1)}(0)$ ne sont pas connues à priori, il est parfois commode de les calculer à l'aide des formules

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0); \quad \lim_{p\to\infty} pR_1(p) = f'(0), \ldots$$
$$\ldots, \lim_{p\to\infty} pR_{n-1}(p) = f^{(n-1)}(0).$$

Dans les cas où la transformée de Laplace $F(p)$ est analytique au voisinage du point à l'infini, la dérivée $f^{(k)}(0)$ s'obtient à l'aide de la formule

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\}_{z=0}.$$

En conclusion signalons que les méthodes proposées par Tykhonov [31] pour la résolution d'équations intégrales de Fredholm de première espèce s'appliquent à l'inversion de la transformation de Laplace.

L'inversion de la transformée de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-xt}\varphi(t)\,dt = F(x), \quad x \in]x_0, +\infty[, \tag{20.8}$$

est un problème non correct.

En effet, premièrement, l'équation (20.8) n'admet pas de solution pour toute fonction $F(x)$ continue ou continûment différentiable; si par exemple, $F(x)$ n'est pas analytique l'équation (20.8) n'admet pas à fortiori de solution. Deuxièmement, si existe une solution $\overline{\varphi}(t)$ correspondant à $\overline{F}(x)$, toute perturbation (de la forme représentée sur la figure 59) d'amplitude M élevée, sur un intervalle Δ suffisamment petit, entraîne une variation aussi petite que l'on veut de l'intégrale (20.8). Donc, toute perturbation d'ordre (δ) pour une métrique de L_2 (ou une métrique uniforme ou même une métrique de $C^{(n)}$) du second membre entraîne une perturbation aussi grande que l'on veut de la solution pour une métrique uniforme.

Le problème étant non correct, le calcul exact d'un original dont l'image est donnée approximativement ne fournit pas la solution

approchée du problème (du moins pour une métrique de C, ce qui est important dans de nombreux problèmes).

Cependant ce problème peut être résolu au moyen d'un « algorithme régularisant », dont le principe a été avancé par A. Tykhonov en 1963 [31]. C'est un algorithme spécial dépendant d'un paramètre α, associant à toute fonction $\widetilde{F}(x)$ une fonction $\widetilde{Z}_\alpha(t)$; si de surcroît $\widetilde{F}(x)$ approche $\overline{F}(x)$ avec une erreur δ pour une métrique de L_2,

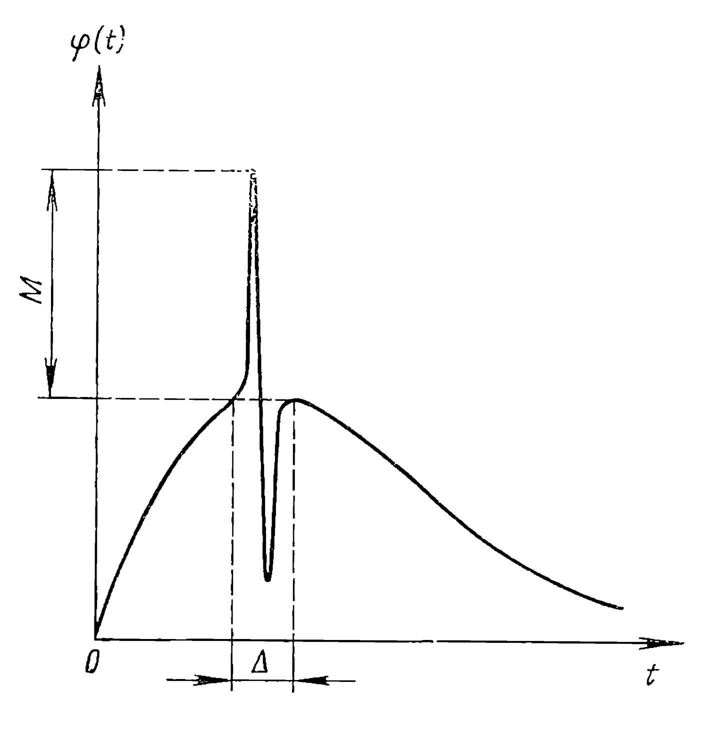


Fig. 59

on constate en concordant les valeurs du paramètre α avec δ $(\alpha = \alpha(\delta))$ que $Z_\alpha(t)$ est une approximation uniforme de $\overline{\varphi}(t)$: $|Z_\alpha(t) - \overline{\varphi}(t)| < \varepsilon(\delta)$; ceci étant si $\delta \to 0$, alors $\varepsilon(\delta) \to 0$.

Les algorithmes régularisants sont utilisés en programmation. Ils constituent une méthode efficace de résolution du problème (20.8).

APPENDICE

Quelques formules de calcul opérationnel *)

n°	$\bar{f}(p) = p\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$	$f(t)$
1	$\bar{f}(p)$	$\varphi(t)$
2	$\bar{f}(ap)$	$\varphi\left(\frac{t}{a}\right)$
3	$p\,[\bar{f}(p) - \varphi(0)$	$\frac{d}{dt}\varphi(t)$
4	$p^n\left[\bar{f}(p) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{p^k}\right]$	$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)$
5	$\frac{p}{p-\beta}\bar{f}\left(\frac{p-\beta}{\alpha}\right)$	$e^{\beta t}\varphi(at)$
6	$\frac{\bar{f}(p)}{p}$	$\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$
7	$\frac{\bar{f}(p)}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}\,(t-\xi)^{n-1}\varphi(\xi)\, d\xi$
8	$e^{-ap}\bar{f}(p)$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t < a \\ \varphi(t-a) & \text{pour } t > a \end{cases}$
9	$e^{-\frac{b}{a}p}\bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$	$\begin{cases} 0 & \text{pour } t < \frac{b}{a} \\ \varphi(at-b) & \text{pour } t > \frac{b}{a} \end{cases}$
10	$e^{ap}\left[\bar{f}(p) - p\int\limits_0^a e^{-pu}\varphi(u)\, du\right]$	$\varphi(t+a),\ a \geqslant 0$ $\varphi(t)$ est une fonction périodique de période $a > 0$

*) Pour les notations des fonctions spéciales voir [12], [26].

n°	$\bar{f}(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$	$f(t)$
11	$\dfrac{p\int_0^a e^{-pt}\varphi(t)\,dt}{1-e^{-ap}}$	$(\varphi(t) = \varphi(t+a))$
12	$p\bar{f}\left(\frac{1}{p}\right)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})\,\varphi(\tau)\,d\tau$
13	$\sqrt{p}\,\bar{f}\left(\frac{1}{p}\right)$	$\int_0^\infty \dfrac{\sin(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
14	$-\sqrt{p}\,\bar{f}\left(-\frac{1}{p}\right)$	$\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sh} 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
15	$p^{\frac{3}{2}}\bar{f}\left(\frac{1}{p}\right)$	$\int_0^\infty \dfrac{\cos(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
16	$-p^{\frac{3}{2}}\bar{f}\left(-\frac{1}{p}\right)$	$\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{ch}(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\pi\tau}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
17	$\dfrac{1}{p^{\nu-1}}\bar{f}\left(\frac{1}{p}\right)$	$t^{\frac{\nu}{2}}\dfrac{J_\nu(2\sqrt{t\tau})}{\tau^{\frac{\nu}{2}}}\,\varphi(\tau)\,d\tau,$ $\operatorname{Re}\nu > -1$
18	$\dfrac{\bar{f}\left(p+\frac{1}{p}\right)}{p+\frac{1}{p}}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\varphi(\tau)\,d\tau$
19	$\bar{f}(\sqrt{p})$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)\varphi(\tau)\,d\tau$
20	$\sqrt{p}\,\bar{f}(\sqrt{p})$	$\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)\varphi(\tau)\,d\tau$
21	$p^{\frac{1-\nu}{2}}\bar{f}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)x^{\frac{\nu}{2}}\,dx\,\times$ $\times\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy})\,y^{-\frac{\nu}{2}}\,\varphi(y)\,dy$

n°	$\bar{f}(p) = p\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	$f(t)$
22	$\frac{p}{p^2+1}\bar{f}(\sqrt{p^2+1})$	$\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,\varphi(\tau)\,d\tau$
23	$\frac{p}{p^2-1}\bar{f}(\sqrt{p^2-1})$	$\int\limits_0^t I_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,\varphi(\tau)\,d\tau$
24	$\frac{p^2}{p^2+1} f(\sqrt{p^2+1})$	$\varphi(t) - t\int\limits_0^t \frac{J_1(\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
25	$\frac{p^2}{p^2-1}\bar{f}(\sqrt{p^2-1})$	$\varphi(t) + t\int\limits_0^t \frac{I_1(\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2)}}\,(\tau)\,d\tau$
26	$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\bar{f}(\sqrt{p^2+1})$	$\varphi(t) - \int\limits_0^t \varphi(\sqrt{t^2-\tau^2})\,J_1(\tau)\,d\tau$
27	$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\bar{f}(\sqrt{p^2-1})$	$\varphi(t) + \int\limits_0^t \varphi(\sqrt{t^2-\tau^2})\,I_1(\tau)\,d\tau$
28	$\frac{p}{p+\sqrt{p}}\bar{f}(p+\sqrt{p})$	$\int\limits_0^t \Psi(\tau,\ t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$
29	$\frac{\sqrt{p}}{p+\sqrt{p}}\bar{f}(p+\sqrt{p})$	$\int\limits_0^t \chi(\tau,\ t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$
30	$\bar{f}(\ln p)$	$\int\limits_0^\infty \frac{t^\xi \varphi'(\xi)}{\Gamma(\xi+1)}\,d\xi + \varphi(0)$
31	$\frac{\bar{f}(\ln p)}{\ln p}$	$\int\limits_0^\infty \frac{t^\tau}{\Gamma(\tau+1)}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
32	$\frac{p}{\ln p}\bar{f}(\ln p)$	$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
33	$\frac{p}{\ln p^\nu}\bar{f}(\ln p^\nu)$	$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\nu\tau-1}}{\Gamma(\nu\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau$
34	$p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{\bar{f}(p)}{p}\right)$	$(-1)^n\,\varphi(t)$

n°	$\bar{f}(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	$f(t)$
35	$(-1)^n \left(p \frac{d}{dp}\right)^n \bar{f}(p)$	$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n \varphi(t)$
36	$(-1)^n p \left(\frac{1}{p} \frac{d}{dp}\right)^n \left[\frac{\bar{f}(p)}{p}\right]$	$\int_0^t t \int_0^t \dots t \int_0^t t\, \varphi(t)\, (dt)^n$
37	$\bar{f}(p)\, \bar{g}(p)$	$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$
38	$p \int_p^\infty \dots p \int_p^\infty \frac{\bar{f}(p)}{p} (dp)^n$	$\frac{\varphi(t)}{t^n}$
39	$\int_p^\infty \frac{\bar{f}(z)}{z}\, dz$	$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau$
40	$\int_0^p \frac{\bar{f}(z)}{z}\, dz$	$\int_t^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau}\, d\tau$

BIBLIOGRAPHIE

1. Berg L., Einfürung in die Operatorenrechnung. Berlin, 1962.
2. Berg L., Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung. Studia Math. 21 (1962) 215-229.
3. Carslaw H., Jaeger J., Operational Methods in Applied Mathematics. Londres, 1943.
4. Carson D., Phénomènes électriques et non stationnaires et calcul opérationnel. Kharkov-Kiev, 1934 (en russe).
5. Chtokalo I., Calcul opérationnel. Kiev, 1972 (en russe).
6. Ditkine V., Calcul opérationnel. UMN 2, vip. 6(22), (1947), 72-158 (en russe).
7. Ditkine V., Résolution d'un problème de chaleur par la méthode du calcul opérationnel. Troudy Matem. in-ta im Steklova 1947, 20, 77-86.
8. Ditkine V., Sur la théorie du calcul opérationnel. DAN 116 (1957) 15-17 (en russe).
9. Ditkine V., Sur la théorie du calcul opérationnel. DAN 123 (1958), 395-396 (en russe).
10. Ditkine V., Proudnikov A., Transformations intégrales et calcul opérationnel. M., Fizmatguiz, 1961 (en russe).
11. Ditkine V., Proudnikov A., Calcul opérationnel à deux variables et ses applications. M., Fizmatguiz, 1958 (en russe).
12. Ditkine V., Proudnikov A., Formulaire de calcul opérationnel. M., Vyschaya chkola 1965 (en russe).
13. Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, bd I-IV. Birkhäuser Verlag, Basel, 1950-1956.
14. Doetsch G., Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch. Berlin und Göttingen, 1947.
15. Efros A., Danilevski A., Calcul opérationnel et intégrales étendues à un contour. Kharkov, 1937 (en russe).
16. Heaviside O., Operators in mathematical Physics. Proc. Roy. Soc. A. 52(1893) p. 504; 54(1894) P. 105.
17. Heaviside O., Electromagnetic theory. London, 1899.
18. Kontorovitch M., Calcul opérationnel et phénomènes non stationnaires dans les circuits électriques. Izd. 2, M. Gostekhizdat, 1953 (en russe).
19. Lavrentiev M., Chabat B., Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. M.-L., Gostekhizdat, 1951 (en russe).
20. Lébédev N., Les fonctions spéciales et leurs applications. M., Gostekhizdat, 1953 (en russe).
21. Lourier A., Calcul opérationnel et ses applications aux problèmes de mécanique. M.-L., Gostekhizdat, 1950 (en russe).
22. Lykov A., Théorie de la chaleur, M.-L., Gostekhizdat, 1952 (en russe).
23. Mikusinski J. an Ryll-Nardzewski C., Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables. Studia Mathematica, 15 (1953), 62-68.

24. Mikusinski J., Rachunk operatorow. Warszawa, 1953.
25. Plessner A., Sur l'introduction du calcul opérationnel d'Heaviside dans la théorie spectrale des opérateurs maximaux. DAN 26, n° 1 (1940) (en russe).
26. Ryjik I., Gradstein I., Tables des intégrales, sommes, séries et produits. M., 1962 (en russe).
27. Szegö G., Polynômes orthogonaux. M., Fizmatguiz, 1962.
28. Titchmarsh E., The zeros of certain integral functions. Proc. London Math. Soc., 25 (1926) 283-302.
29. Titchmarsh E., The Zeta-Function of Riemann. Oxford, 1930.
30. Titchmarsh E., Introduction to the theory of Fourier's integrals. Oxford, Clarendon press, 1937.
31. Tykhonov A. a) Sur la résolution de problèmes non corrects et une méthode de régularisation. Dokl. AN SSSR 151, 1963, n° 3, 501-504. b) Sur la régularisation de problèmes non corrects. Dokl. AN SSSR 153, 1963, n° 1, 49-52.
32. Tykhonov A., Arsenine V., Méthodes de résolution de problèmes non corrects. M., Naouka, 1974. (en russe).
33. Van der Pol B., Bremmer H., Operational Calculus Based on the two sised Laplace Integral. Cambridge, 1950.
34. Watson G., A treatise on the theory of Bessel Functions, 1945.

INDEX

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre abresse: Editions Mir,
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique